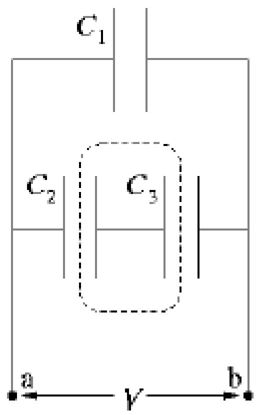
Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

1 Mart 2002

MIT 8.02, Bahar 2002
Ödev # 3 Çözümler

Problem 3.1

Seri ve paralel bağlı kapasitörler. (Giancoli 24-23)



(a) İlk önce $C_2 - C_3$ kombinasyonunun eşdeğer sığası C_{23}'ü bulalım. Bu iki kapasitör seri bağlıdır; bu nedenle

$$C_{23} = \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}.$$

yazabiliriz. C_{23}, bu durumda, C_1 ile paralel bağlı olduğundan tüm devrenin eşdeğer kapasitansı için,

$$C_{eq} = C_1 + C_{23} = C_1 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}.$$

yazılabilir.

(b) Genelde $Q_1 = C_1V_1$, $Q_2 = C_2V_2$ ve $Q_3 = C_3V_3$ yazabiliriz. Uygulanan V voltajının ve C_1'in $C_2 - C_3$ kombinasyonuna paralel bağlı olarak verilmesinden $V_1 = V$ ve $V_2 + V_3 = V$ veya eşdeğer olarak $Q_1/C_1 = V$ ve $Q_2/C_2 + Q_3/C_3 = V$ yazabiliriz. Buna ek olarak, yük korunumundan $Q_2 = Q_3$ olması gerekir (yukarıdaki şekilde kesikli çizgi ile sınırlandırılmış devre parçasını göz önüne alın: yük bu devrenin içine veya dışına akmaz, bu yüzden o başlangıçta net bir yük taşımıyorsa C_2'nin sağ-levhasındaki yük her zaman C_3'ün sol levhasındaki yükle eşit ve zıt işaretli olmalıdır). $C_1 = C_2 = 2C_3 = C$ yazılabileceğinden

$$Q_1 = CV\,, \quad Q_2 = Q_3 = CV/3 \,.$$

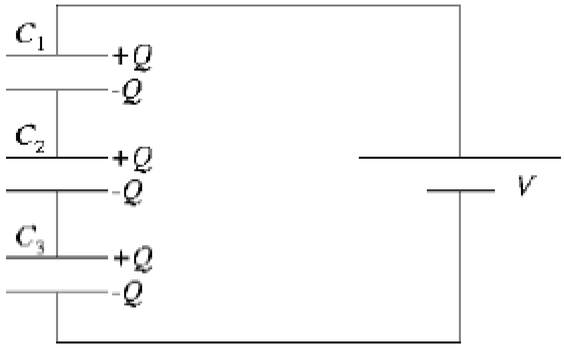
buluruz. Verilen sayısal değerleri yerine yazarak,

$$Q_1 = 350\,\mu C\,, \qquad Q_2 = Q_3 = 117\,\mu C\,.$$

elde ederiz.

Problem 3.2

Anahtarlı Kapasitörler.



(a) B açık A kapalı olduğunda C_4 devre dışı kalır ve eşdeğer devre sağdaki şekilde görüldüğü gibi olur. Bataryanın voltajı $V = 120\ V$ ise

$$V_1 + V_2 + V_3 = V$$

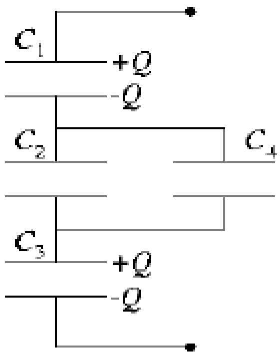
yazabiliriz.

Problem3.1'dekine benzer bir yük-korunumu düşüncesinden, üç kapasitörün üçü de levhaları üzerinde aynı $\pm Q$ yüklerine sahip olmalıdır. Üçü de aynı kapasitansa (C diyelim) sahip olduğundan,

$$Q = CV_1 = CV_2 = CV_3$$

$$\Rightarrow V_1 = V_2 = V_3 = V/3 = 40\ V$$

yazabiliriz. Kapasitörler bu anlamda bir kez yüklendiğinde, herbirinin potansiyeli A anahtarı açıldıktan sonra da aynı kalacaktır.

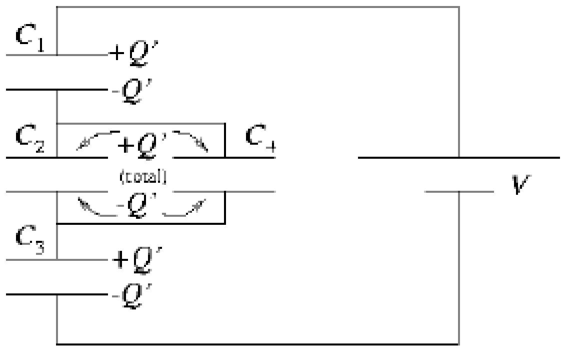


(b) A anahtarı açıldığında devrenin bataryayı içeren kolu oyun dışı kalır; fakat (a) şıkkında olduğu gibi C_1, C_2 ve C_3 kapasitörleri yüklenmeden önce değil. Şimdi *B* anahtarını kapatarak C_4'ü de devreye sokarız ve eşdeğer devre solda gösterildiği gibi olur. C_1 ve C_3 daha önce olduğu gibi hala aynı Q yükünü taşıyacaklardır (A anahtarının açılması onları yük akışından izole edilmiş bırakır). Bununla beraber sadece C_2 üzerinde kalan orjinal Q yükü, şimdi C_2 ve C_4 arasında dağılır. $C_2 = C_4$ olduğundan simetriden dolayı herbirininin üzerinde $Q/2$'lik bir yüke sahip olacağız ve böylece C_2 ve C_4'ün uçları arasındaki voltaj C_2'nin orjinal voltajının yarısı olacaktır.

$$V_1 = V_3 = 40\ \mathrm{V},\ \ V_2 = V_4 = 20\ \mathrm{V}.$$

(c) A anahtarının açık ve başlangıçta kapasitörlerin yüklü olmadığı devrede, B anahtarının kapatılması, bataryayı bulunduran devrenin kolu bağlı olmadığı için, kapasitörlerin herhangi birisine bir potansiyel sağlamaz.

(d) Şimdi A anahtarını kapatalım, B anahtarı önceden kapalıydı. Devre sağda gösterildiği gibidir. $C_2 - C_4$ paralel kombinasyonunun eşdeğer kapasitansı $C_{24} = C + C = 2C$'dir. Dört kapasitörden oluşan sistem,



$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{2C} + \frac{1}{C}\right)^{-1} = \frac{2}{5}C\,,$$

eşdeğer kapasitansına sahip olacaktır.

Ve böylece bataryadan çekilen yük ve C_1, C_{24} ve C_3'ün herbiri üzerindeki yük

$$Q' = C_{eq}V = \frac{2}{5}CV\ .$$

dir. Şimdi farklı kapasitörlerin uçları arasındaki potansiyel farkını tayin edebiliriz:

$$V_1 = V_3 = \frac{Q'}{C} = \frac{2}{5}V = 48\ V$$

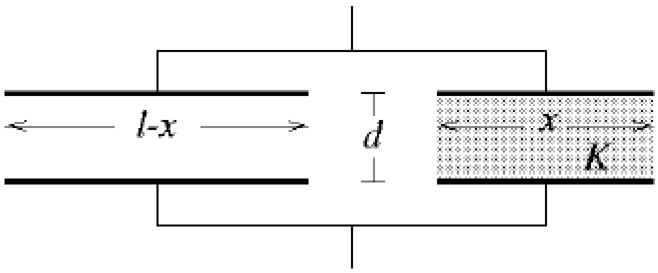
ve

$$V_2 = V_4 = \frac{Q'}{2C} = \frac{1}{5}V = 24\ V\ .$$

elde ederiz.

Problem 3.3

Kapasitans üzerine bir dielektrik ortamın etkisi. (Giancoli 24-60.)



(a) Bu sistemin toplam kapasitansını elde etmek için, yukarıda gösterildiği gibi, onu, birbirine <u>paralel</u> iki kapasitörün eşdeğeri olarak düşünün. Soldaki (dielektriksiz) "kapasitör" $l(l-x)$ levha alanına ve $\varepsilon_0 l(l-x)/d$ kapasitansına sahiptir (Giancoli, denklem 24-2, s. 615). Sağdaki (dielektrikli) ‘‘kapasitör’’ lx alanına ve $\kappa\varepsilon_0 lx/d$ kapasitansına sahiptir. Böylece toplam kapasite bunların toplamıdır:

$$C = \frac{\epsilon_0 l}{d}[(K-1)x + l] \ .$$

$x = 0$ olduğunda bu $\varepsilon_0 l^2/d$'ye indirgenir ve $x = l$ olduğunda $\kappa\varepsilon_0 l^2/d$ elde ederiz; bunlar gerçek limitlerdir.

(b) Potansiyel farkı V_0 olan bu kapasitörde depolanmış enerji, Giancoli, denklem 24-5 (s.620) ile verilecektir:

$$U = \frac{1}{2}CV_0^2 = \frac{\epsilon_0 l}{2d}\,[(K-1)x + l]\,V_0^2$$

(c) x'i Δx kadar artırarak, dilimi levhalar arasında küçük bir miktar ileri hareket ettirdiğimizi varsayın. Kapasitans küçük bir miktar artarken, potansiyel (belki bir batarya tarafından sağlanan) aynı kalır, bu nedenle depolanmış enerjideki değişim,

$$\Delta U = \frac{1}{2}C_f V_0^2 - \frac{1}{2}C_i V_0^2$$

$$= \frac{\epsilon_0 l}{2d}\,(K-1)\Delta x V_0^2\,,$$

olacaktır. Bu bir artışı temsil eder ($\kappa > 1$olduğunu hatırlayınız). Bu, dilimi içerde taşımak için pozitif iş yaptığımız anlamına mı geliyor? Batarya da kapasitör / dielektrik sistemi üzerine iş yapış olduğu için hayır, değil! Kapasitör üzerindeki yük ,

$$\Delta Q = C_f V_0 - C_i V_0$$

$$= \frac{\epsilon_0 l}{d}\,(K-1)\Delta x V_0\,,$$

miktar artacaktır. Burada batarya bu yükü koymak için,

$$W_{pil} = \Delta Q V_0 = \frac{\epsilon_0 l}{d}\,(K-1)\Delta x V_0^2$$

kadar bir iş yapmıştır. O zaman *bizim* yapmış olduğumuz iş,

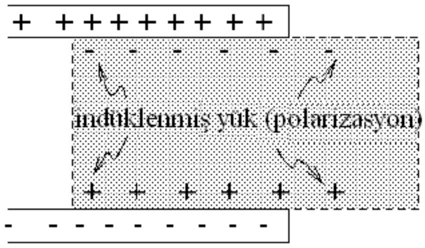
$$\begin{aligned} \Delta U &= W_{pil} + W_{biz} \\ \Longrightarrow W_{biz} &= \Delta U - W_{pil} \\ &= -\frac{\epsilon_0 l}{2d}\,(K-1)\Delta x V_0^2 \end{aligned}$$

olur. Bu yüzden aslında sistem üzerine negatif iş yapmış olduk ve orada dilim üzerine etkidiğimiz kuvveti dengeleyen, dilimi içeri doğru çeken bir elektrik kuvveti olmalıdır.

$$W_{biz} = F_{biz}\Delta x = -F_{elek}\Delta x$$

$$\Rightarrow F_{elek} = \frac{\varepsilon_0 l}{2d}(\kappa - 1)v_0^2 \text{ (dilimi içeri çeken kuvvet)}$$

Bu elektrik kuvvetinin doğası nedir? Kapasitör levhaları üzerindeki yük, dielektrik dilimin yüzeyi üzerinde bir zıt yük indükler. Kapasitörün kenarlarında yük dilim üzerinde, hatta kapasitör levhalarının biraz ötesinde indüklenir (sağdaki şekle bakınız). Bu indüklenmiş yük kapasitör levhaları üzerindeki yüklere doğru çekilecektir ve levhalar arasında dilimi daha ileri çeken bu kuvvetin bir içe doğru bileşeni vardır.



Problem 3.4

Silindirik ve küresel kapasitörlerin karşılaştırılması.

(a) Giancoli Örnek 24-3 (s. 617) nin sonucunu kullanarak, küresel kapasitörün kapasitansını hesaplarız.

$$C_{küresel} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}\right) = 4\pi\ (8{,}85 \times 10^{-12})\left(\frac{(0{,}06)(0{,}09)}{0{,}09 - 0{,}06}\right) = 2{,}00 \times 10^{-11}\ \mathrm{F}$$

Silindirik kapasitör için, Giancoli örnek 24-2 (s.616) nın sonucunu kullanırız.

$$C_{silindirik} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)} = \frac{2\pi(8{,}85 \times 10^{-12})(0{,}15)}{\ln(0{,}09/0{,}06)} = 2{,}06 \times 10^{-11}\ \mathrm{F}$$

Bunlar, levhalar arası uzaklık her iki durumda da aynı ve levhaların alanları hemen hemen aynı olduğu için, yaklaşık olarak eşittir. Bu, (aşağıda göreceğimiz gibi) bu iki durumda yaklaşık aynı kapasitansı verir.
(b) $R_2 = R_1 + \delta\ (\delta \ll R_1)$ için küresel kapasitörün sığasını,

$$C_{küresel} = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_1(R_1+\delta)}{R_1+\delta-R_1}\right) = \epsilon_0\frac{4\pi R_1^2}{\delta}(1+\delta/R_1)\,.$$

olarak buluruz.
$\delta/R_1 \ll 1$ olduğundan, bu basitçe $C_{küre} = \varepsilon_0 A/\delta$'dir. Burada $A = 4\pi R_1^2$ her bir kabuğun alanıdır. Bu paralel levhalı kapasitör formülüdür.

Silindirik kapasitör için aşağıdaki formülü kullanabiliriz. Formülü birinci mertebeden Taylor açılımı yoluyla doğrulayabilirsiniz (bakınız Giancoli Ek A, s. A-1).

$x \ll 1, \ln(1+x) \cong x$ için

Kapasitans,

$$C_{silindirik} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(1+\delta/R_1)} \cong \epsilon_0 \frac{2\pi R_1 L}{\delta} \quad .$$

dır.

Gene bu basitçe $C_{slnd} = \varepsilon_0 A/\delta$'dır. Burada şimdi $A = 2\pi R_1 L$ her bir silindirik kabuğun alanıdır. Bu yüzden, levha boyutlarına göre levhalar arası uzaklık çok küçük olduğu zaman, buradan, kapasitörler eğri bir geometriye sahip olsalar bile, paralel-levhalı kapasitör olarak alınabileceğini görebiliriz.

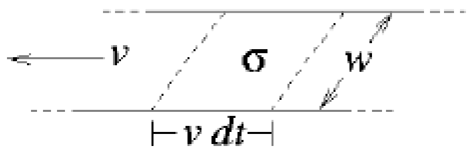
Problem 3.5

Van de Graaff

(a) Kayışın her iki tarafında elektrik alan $E = 10^6 V/m$ olarak verilmektedir. Bunu, Giancoli, Örnek 22-6 (s. 583) 'ün sonucundan, σ yüzeysel yük yoğunluğuna bağlayabiliriz:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 2\epsilon_0 E = 2(8{,}85 \times 10^{-12})(10^6) = 18\ \mu C/m^2 \quad .$$

Kayış $w = 0{,}5\ m$ genişliğinde ve 30 m/s hızla hareket etmektedir. Bir dt zaman aralığında verilen bir konumdan kayışın υdt uzunluğu geçer (sağdaki şekle bakınız). Bu konumdan geçen kayışın alanı $w\upsilon\, dt$ ve dt zamanında geçen yük $dQ = \sigma w \upsilon dt$ olacaktır. Bu yüzden kayışla taşınan akım,



$$I = \frac{dQ}{dt} = \sigma w v = (18 \times 10^{-6})(0{,}5)(30) = 2{,}7 \times 10^{-4}\ \mathrm{A}\ .$$

olacaktır.

(b) Küresel kubbenin hemen dışında maksimum elektrik alan hava için boşalma alanı $E_{maks} = 3 \times 10^6 V/m$ olacaktır (bakınız Giancoli Örnek 23-5, s. 596, veya ödev # 2'den problem 2.6.) Kubbenin hemen dışındaki elektriksel alan kubbe üzerindeki toplam yükle ilişkili olup,

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\,(\text{Giancoli Örnek } 23-4, \text{s.} 596),$$

ile verilir. Böylece kubbenin maksimum yükü şu olur:

$$Q_{maks} = 4\pi\epsilon_0 R^2 E_{maks} = 4\pi(8{,}85 \times 10^{-12})(3 \times 10^5)R^2 = (3{,}3 \times 10^{-4}\ C)R^2$$

(R metre cinsinden ölçülmektedir). Kubbe $I = 2{,}7 \times 10^{-4}$ Coulomb/saniye hızıyla yüklenmiş ise, bu durumda kubbeyi yüklemek için gerekli zaman

$$\Delta t = Q_{maks}/I = (1{,}2\ s)R^2 .$$

olacaktır.

(c) Kubbenin maksimum elektrostatik potansiyeli (gene Giancoli, Örnek 23-5, s. 596'ya bakınız)

$$V_{maks} = RE_{maks} = (3 \times 10^6\ V)\,R .$$

dir.

(d) $R = 0{,}15\ m$ için,

$$Q_{maks} = 7{,}4\ \mu C, \quad \Delta t = 0{,}027\ s\ , \qquad ve \quad V_{maks} = 4{,}5 \times 10^5\ V .$$

olur.

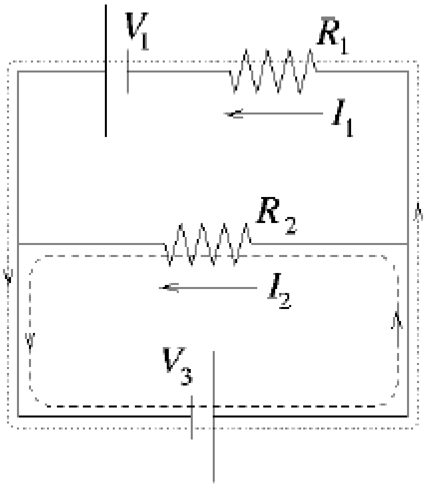
R = 0,5 m için,

$$Q_{maks} = 83\ \mu C, \quad \Delta t = 0{,}3\ s\ , \qquad ve \quad V_{maks} = 1{,}5 \times 10^6\ V .$$

Problem 3.6

Direnç Devresi. (Giancoli 26-25.)

Sağdaki şekilde gösterildiği gibi, pozitif akım akış yönünde R_1 ve R_2 dirençlerindeki akımlar I_1 ve I_2 olsun. Kirchhoff'un çevrim kuralı devreyi dışından saran bir halkaya uygulanırsa (çizimde notalı çizgi ile çizilmiş halka) bize $V_1 + V_3 = I_1 R_1$ bağıntısını verir. Devrenin tam alt yarısını içeren ikinci bir halka (şekilde kesikli çizgi ile gösterilmiş halka) bize $V_3 = I_2 R_2$ verir. Akımlar için çözüp verilen voltaj ve dirençleri yerine yazarak,

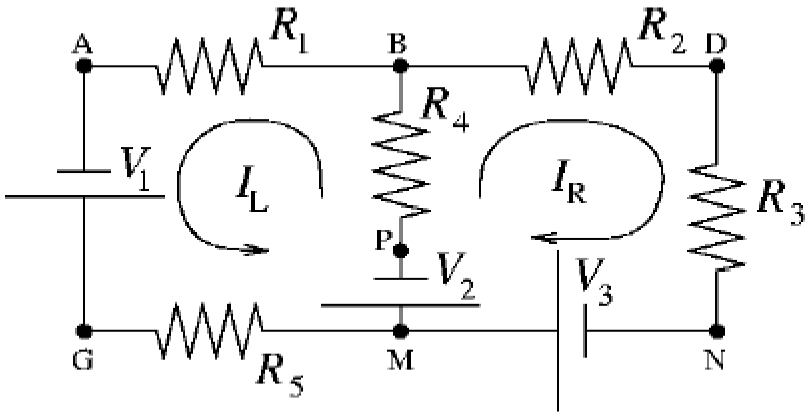


$$I_1 = (V_1 + V_3)/R_1 = 0{,}68\ A\,,$$
$$I_2 = V_3/R_2 = 0{,}4\ A\,.$$

elde ederiz. I_1 ve I_2'nin her ikisi de pozitiftir. Bu nedenle herbir dirençten geçen akım "sola doğrudur".

Problem 3.7

Direnç Şebekesi.



$$(R_1,\ R_2,\ R_3,\ R_4, R_5) = (10{,}30{,}50{,}70{,}100)\Omega$$

$$(V_1,\ V_2,\ V_3) = (12{,}24{,}36)V$$

(a) Devrenin sol ve sağ taraflarındaki akımları I_L ve I_R ile göstereceğiz ve onları yukardaki devrede gösterildiği yönde alacağız. O zaman R_4 ve V_2'den geçen akımlar $I_L + I_R$ yükün korunumundan artar (Kirchhoff'un kavşak kuralı). Sol devrenin etrafında dolanıyorsak, Kirchhoff'un halka kuralı EMK ve voltajların toplamının sıfıra azalması gerektiğini söyler. Bu bize

$$+V - I_L R_5 - V_2 - (I_L + I_R)R_4 - I_L R_1 = 0\,.$$

verir.
Burada pilin negatif ucundan pozitif ucuna doğru geçtiğimizden V_1'in işareti pozitiftirtir. V_2'de ise pozitif uctan negatif uca geçtiğimizden negatif işaretlidir. Devrenin sağ tarafındaki halka etrafında hareket bize,

$$+V_3 - V_2 - (I_L + I_R)R_4 - I_R R_2 - I_R R_3 = 0$$

ifadesini verir. Bu iki denklemi yeniden düzenlersek,

$$(R_1 + R_4 + R_5)/L + (R_4)/R = V_1 - V_2 ,$$
$$(R_4)/L + (R_2 + R_3 + R_4)/R = V_3 - V_2 ,$$

elde ederiz. Cebirsel bir baş ağrısından kendimizi korumak için, bu noktada direnç ve batarya voltajlarının verilen sayısal değerlerini (SI birimlerinde) yerine yazabiliriz:

$$180/L + 70/R = -12 ,$$
$$70/L + 150/R = 12$$

Bu denklemlerin çözümü bize,

$$I_L = -119\ mA, \quad I_R = 136\ mA, \quad I_L + I_R = 16{,}3\ mA$$

değerlerini verir. I_L için negatif bir değer elde edilmesi durumunda, devrenin sol taraftaki akımın gerçekte saat ibresi yönünde aktığını anlarız. Özetlersek:

- R_1 ve R_5'ten saat ibresi yönünde 119 mA,
- R_2 ve R_3'ten saat ibresi yönünde 136 mA, ve
- R_4'ten yukarı doğru 16,3 mA akım geçer.

(b)

$$V_A - V_P = -(16{,}3 \times 10^{-3})(70) + (119 + 10^{-3})(10) = 0{,}049\ V$$

Dikkat ederseniz $70\ \Omega$'luk direnç (R_4) üzerinden geçerken potansiyel <u>düşer</u>, çünkü akımla aynı yönde gideriz, fakat $10\ \Omega$'luk direç (R_1) üzerinden geçerken potansiyel artar, çünkü akıma zıt yönde ilerleriz.

$$V_P - V_N = +36\ V - 24\ V = 12\ V .$$
$$V_G - V_D = +(136 \times 10^{-3})(30) + (119 \times 10^{-3})(10) + 12\ V = 17{,}3\ V .$$

Problem 3.8

Telin direci. (Giancoli 25-52.)

(a) Telin direnci basitçe,

$$R = V/I = (22{,}0 \times 10^{-3})/(750 \times 10^{-3}) = 29{,}3\ m\Omega\ .$$

(b) Giancoli 25-3 (s.640) denkleminden, l uzunluğundaki A kesit alanlı bir telin direncini, onun özdirenci cinsinden

$$\rho = RA/l = (29{,}3 \times 10^{-3})\pi(10^{-3})^2/(5{,}00) = 1{,}84 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$$

olarak çözebiliriz.

(c) Akım yoğunluğu, basitçe telin birim kesit alanı başına akımdır:

$$j = I/A = (750 \times 10^{-3})/(\pi \times (10^{-3})^2) = 2{,}39 \times 10^5\ A/m^2$$

(d) Giancoli 25-17 denkleminden (s. 649) telin içindeki elektrik alanı için,

$$E = \rho j = (1{,}84 \times 10^{-8})(2{,}39 \times 10^5) = 4{,}40 \times 10^{-3}\ V/m$$

buluruz.

(e) Giancoli denklem 25-14 (s. 648) bize serbest elektron yoğunluğunu (± işaretini dikkate almayacağız) verir:

$$n = j/e\,v_d = (2{,}39 \times 10^5)/\big((1{,}6 \times 10^{-19})(1{,}7 \times 10^{-5})\big) = 8{,}8 \times 10^{28}\ elektron/m^3$$

Problem 3.9

Isıtıcının enerji tüketimi. (Giancoli 25-61.)

(a) Ev halkının günlük çeşitli enerji tüketimleri:

$$\begin{aligned} U_{ısıtıcı} &= 1{,}8\ kW \times 3{,}0\ h = 5{,}4\ kWh \\ U_{aydınlatma} &= 4 \times 0{,}1\ kW \times 6{,}0\ h = 2{,}4\ kWh \\ U_{soba} &= 3{,}0\ kW \times 1{,}4\ h = 4{,}2\ kWh \\ U_{diğer} &= 2{,}0\ kWh \end{aligned}$$

Böylece ev halkı tarafından bir günde kullanılan toplam enerji,

$$U_{ısıtıcı} + U_{aydınlatma} + U_{soba} + U_{diğer} = 14\ kWh$$

Ve onların aylık faturası,

$30 \times 14\ kWh \times 0{,}15 TL/kWh = 63 TL$

olacaktır.

(b) Kömürün enerji verimini, kkal/kg'dan kWh/kg'a dönüştürelim (Giancoli'nin önkapağının iç tafına bakınız)

$$7000\, kcal/kg \times \frac{1\ kWh}{860\ kcal} = 8{,}12\ kWh/kg$$

Bir % 35 verimli güç santrali kömürden $0{,}35 \times 8{,}12\ kWh/kg = 2{,}85\ kWh/kg$ kullanılabilir enerji elde edecektir. Böylece ev halkının ihtiyaçlarını karşılamak için bir yılda yakılacak kömür miktarı,

$$365 \times 14\ kWh \times \frac{1\ kg}{2{,}85\ kWh} \simeq 1800\ kg.$$

olacaktır.

Problem 3.10

Elektrikli araba.
Giancoli 25-72.

(a) Otomobilin seyahat hızının SI birimlerine dönüştürülmesi $v = (40\ km)/h = 11.1\ m/s$ verir. Aracın motoru bu hızda 240 N'luk yavaşlatıcı hız dengeleyebilen bir kuvvet sağlamalıdır. Bu yüzden gerekli motor gücü:

$$P = Fv = (240)(11{,}1) = 2664\ W \simeq 3{,}6\ beygir\ gücü$$

(Giancoli'nin ön kapağının iç kısmından 1 beygir gücü $= 746\ W$).

(b) Bataryalar tamamen yüklendiği zaman toplam enerji,

$$U = 26 \times 12\ V \times 52\ A \cdot h = 16{,}2\ kWh = 5{,}84 \times 10^7\ J$$

dir. Eğer d otomobilin yükünden dolayı gitmesi gereken mesafe ise, $U = Fd$ ifadesinden,

$$d = U/F = (5{,}84 \times 10^7)/(240) = 2{,}43 \times 10^5 = 243\ km\ .$$

bulunur.

SON