

Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

22 Şubat 2002

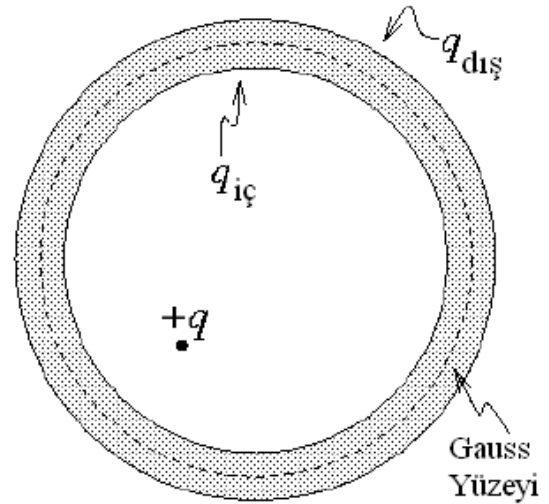
MIT 8.02, Bahar 2002 Ödev # 2 Çözümler

Problem 2.1

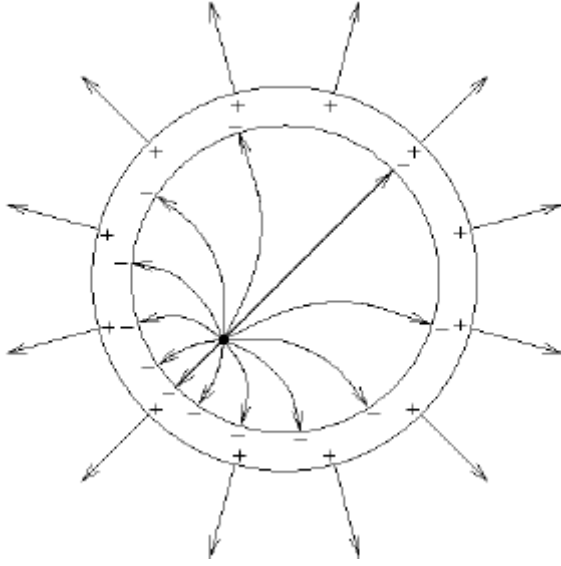
İçi boş bir metalik küre içerisindeki bir noktasal yükün elektrik alanı - Gauss Yasası İş Başında

Bu problemi çözmeye kalkışmadan önce, Kesim 21-9'u (ss. 562-63) ve Giancoli'den Örnek 22-7'yi gözden geçirmelisiniz. Bu tartışmalardan (1) metal içerisinde elektrik alanın sıfır olduğunu; (2) metal yüzeyindeki herhangi bir yükün metal yüzeyinde kalması gerektiğini; (3) metalin hemen dışında elektrik alanın yüzeye dik ve $\sigma = \epsilon_0 E$ yerel yüzeysel yük yoğunluğunu verdiğini biliyoruz. Bu genel ilkeleri eldeki probleme uygulayalım.

(a) Küresel metal kabuk içindeki $+q$ yükü metal üzerinde bir yük dağılımı indükler. İç yüzeyde indüklenmiş toplam yük $q_{iç}$ ve dış yüzeyinde indüklenmiş toplam yük $q_{dış}$ olsun. Küre değişmez kaldığından, yük korunumu $q_{iç} + q_{dış} = 0$ sahip olmamız gerektiğini söyler. $q_{iç}$ nedir? Sağdaki şekilde gösterildiği gibi metal kabuğun tam olarak içinde bulunan bir Gaussian yüzey alın: bu yüzeyin içindeki toplam yük $(q_{iç} + q) = 0$ 'dir. Fakat metal içinde E sıfır olduğundan,



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = (q_{iç} + q)/\epsilon_0 \equiv 0.$$



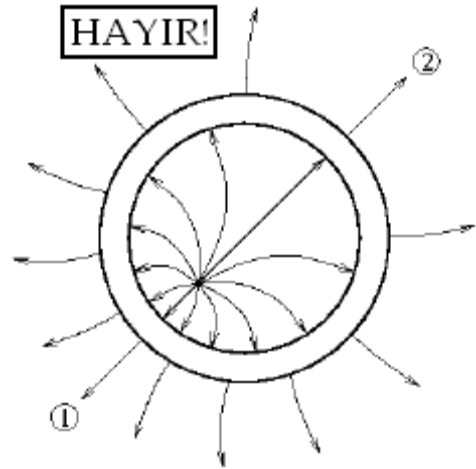
Böylece $q_{iç} = -q$ ve böylece $q_{dış} = +q$ olur. $q_{iç}$ ve $q_{dış}$ 'in dağılımı ve eşlik eden elektrik alan çizgileri soldaki şekilde gösterildiği gibi olur. İç yüzeydeki negatif yük, içteki $+q$ yüküne en yakın küre yüzeyine doğru toplanır. Aksine dış yüzeydeki pozitif yük dış yüzeye düzgün olarak dağılır. Niçin burada düzgündür? Çünkü metal bir eşpotansiyel yüzeydir ve dışarda küresel simetriye sahip olalım diye dışında yük yoktur (içinde olduğu gibi).

Böylece elektrik alan için olası bir çözüm dışarda, yukarıda çizdiğimiz gibi

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} \quad (1)$$

dır.

Dıştaki \mathbf{E} elektrik alanı için (örneğin sağdaki çizimdeki gibi) başka herhangi bir çözüm izinli değildir; çünkü dış yüzey, böyle topolojiler için bir eşpotansiyel olmayacaktır. Örneğin şekilde 1 ile işaretlenmiş alan çizgileri boyunca ∞ 'dan bir test yükünü getirmek için gerekli iş, 2 ile gösterilmiş alan çizgileri boyunca bir test yükünü getirmek için gerekli işten daha büyüktür ve böylece metal bu alan için bir eşpotansiyel olmayacaktır (1'in yakınındaki elektrik alan şiddeti 2 yakınındakinden daha büyüktür. Çünkü alan çizgilerinin yoğunluğu daha büyüktür).



Dıştaki \mathbf{E} için tek çözümün denklem (1) olduğunun (el sallamanın aksine) şiddetle savunulması için, elektostatikte Teklik Teoremi olarak isimlendirilen birşeye başvurmamız gerekir: Sınırlarınızın tümünü ve diğer şartları sağlayan (metal bir eşpotansiyeldir, küre dışındaki serbest yükler değil) bir çözümünüz varsa, o zaman bu tek çözümdür (yani o tektir). Bunun ispatı bu dersin düzeyinin ötesindedir; bu yüzden onu geçiyoruz.

(b) İç tarafta $+q$ yükünü hareket ettirdiğimizde, yukarıdaki nedenlerden dolayı dış yüzeydeki yük dağılımı değişmez. Elbette $+q$ yükünü hareket ettirdiğimizde iç yüzeyde

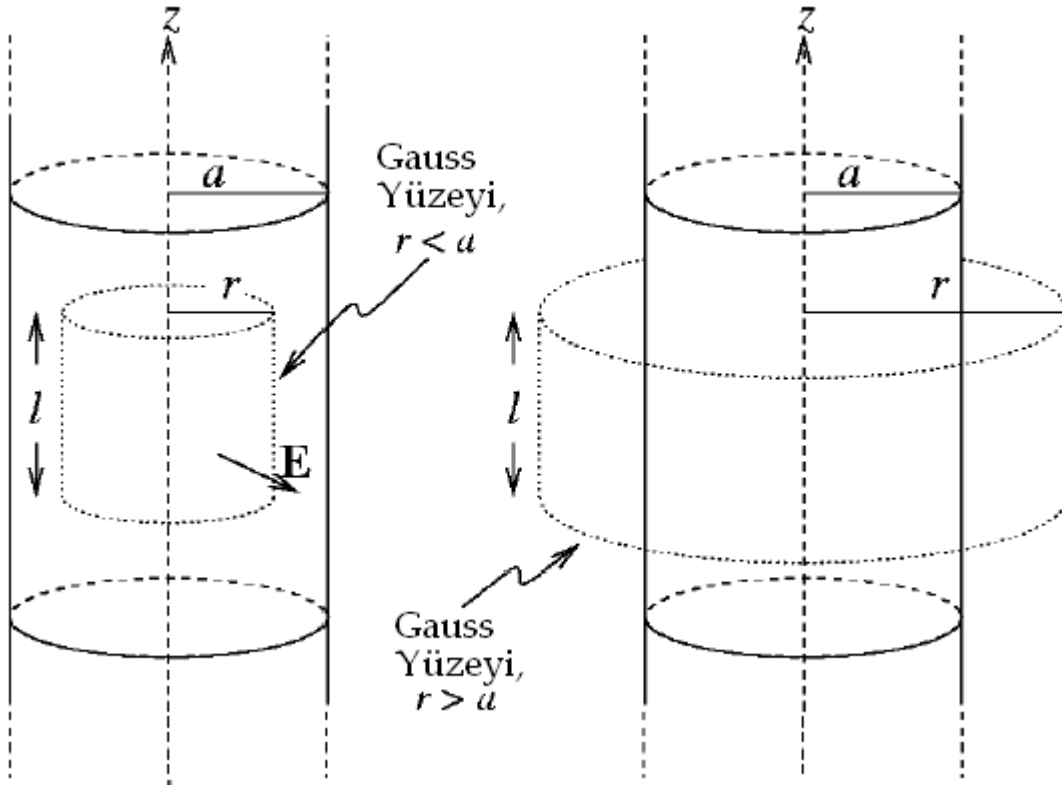
indüklenmiş yük, metal içinde herhangi bir yerde $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ şartını sürdürülebilmesi için, kendini yeniden dağıtır.

(c) $+q$ yükü iç yüzeye dokunduğunda, indüklenmiş $-q$ tamamen temas noktasında toplanır ve $+q$ 'yü yok eder, dengeler. Dış yüzeyde sadece $+q$ yükünü bırakırız ve ona eşlik eden \mathbf{E} alanı denklem (1)'de verildiği gibidir.

Problem 2.2

Yüklü bir silindirin elektrik alanı ve potansiyeli.

(a) \mathbf{E} kendisini oluşturan yük dağılımının simetrisini yansıttığından, silindirik radyal doğrultuda olacaktır. Bunu resmetmek için, uzayda bir noktada \mathbf{E} 'nin pozitif z –bileşeni olduğunu iddia ettiğinizi varsayınız. Bunun öyle olmadığına, \mathbf{E} 'nin $-z$ 'den ziyade $+z$ 'yi tercih etmesi için bir sebep olmadığından, öğretmeniniz karşı çıkacaktır: (yük dağılımı (sonsuz uzunlukta) $-z$ 'den $+z$ 'yi ayırt edecek bir özellik içermez. Aynı düşünce \mathbf{E} 'nin pozitif açısıl bir bileşene sahip olacağını iddia etmeniz durumunda da geçerli olacaktır. Bununla beraber, yük dağılımı açıkça radyal bir yapıya sahip olduğundan, \mathbf{E} sadece radyal olacaktır.



(b) (a)'daki düşünceye dayanarak ve E 'nin büyüklüğünün sadece r 'ye bağlı olduğu gerçeğinden $E = E(r)\hat{r}$ olduğunu varsayalım ve ilk olarak $0 \leq r \leq a$ durumunu düşünelim. Yukarıdaki çizimde solda gösterilen Gauss yüzeyini alalım. r yarıçaplı ve l yüksekliğine sahip bu silindirin içindeki toplam yük, onun hacmi $\pi r^2 l$ çarpı birim hacimdeki yük ρ 'dur. Sol taraf için Gauss Yasasını uygularsak,

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \int_{\text{uçlar}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} + \int_{\text{kenarlar}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} \\
 &= \int_{\text{uçlar}} 0 + \int_{\text{kenarlar}} E(r) dA \\
 &= E(r) \int_{\text{kenarlar}} dA \\
 &= E(r) 2\pi r l . \quad (2)
 \end{aligned}$$

elde ederiz.

Denklem (2)'nin içeriğinin ne olduğunu açıklayalım. İlk olarak yüzey integralini, biri alt ve üst taban üzerinden, diğeri kenarlar üzerinden alınan iki integrale bölebiliriz. Alt ve üstün her yerinde elektrik alan Gauss yüzeyi normaline dik varsayılmaktadır. Ve böylece burada $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = 0$ dır. Böylece orijinal yüzey integrali gerçekte sadece silindirin kenarlarından gelen katkıları içerir. Silindirin kenarlarında $\mathbf{E} = E\hat{r}$ dir ve \hat{r} Gauss yüzeyine dik dışarı doğrudur. Böylece kenarlarda $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = E dA$ olur. Daha sonra E 'nin sadece r 'ye bağlı olması varsayımı, r integralini aldığımız yüzey üzerinde değişmediği için, $E(r)$ 'yi kenar yüzeyi üzerinden alınan integralin dışına almamıza izin verir. Geri kalan integral tam olarak silindirin yan yüzeyinin alanıdır veya $2\pi r l$ dir. Böylece Gauss Yasasından,

$$\begin{aligned}
 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= Q_{\text{toplam}}/\epsilon_0 \\
 \Rightarrow 2\pi r l E(r) &= \rho \pi r^2 l / \epsilon_0 ,
 \end{aligned}$$

veya

$$E(r) = \frac{r\rho}{2\epsilon_0}, \quad 0 \leq r \leq a \quad (3)$$

yazabiliriz.

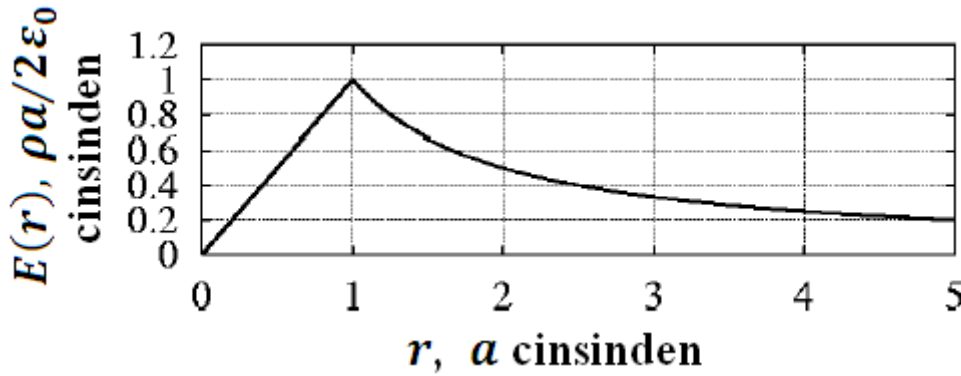
Şimdi $r > a$ için sağdaki Gauss yüzeyini düşünelim. Şimdi, sürekli yük dağılımımız $r = a$ 'da son bulduğundan, $\rho\pi a^2 l$ 'de sabitleşen Gauss yüzeyi içindeki toplam yük hariç, herşey yukarıdaki gibi olur. Böylece şimdi,

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = Q_{\text{toplam}}/\epsilon_0$$

$$\Rightarrow 2\pi r l E(r) = \rho\pi a^2 l / \epsilon_0$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0 r}, \quad r > a. \quad (4)$$

yazabiliriz. (3) ve (4)'ü kullanarak $E(r)$ 'nin nasıl değiştiğini çizebiliriz.



Eğride $r = a$ 'da bir "kırılma" olduğuna, fakat süreksizlik olmadığına, dikkat ediniz; E 'nin her iki değişim biçimi $r = a$ 'da aynı değeri verir. E 'de süreksizliği sadece nokta yükler, çizgisel yükler veya yüklü levhalar aldığınız zaman bulabilirsiniz, bu problemde olduğu gibi, sürekli hacimsel yük dağılımlarına sahip olduğunuz zaman değil. Bu eğriyi bir yük küresi için Giancoli'de (s.582) Şekil 22-13 ile karşılaştırınız. Bizim E ifademiz $r > a$ (silindirik yüzey) için $1/r$ ile azalırken Giancoli'nin küre için çözümününün $r > r_0$ için $1/r^2$ ile azalması hariç, onlar çok benzerdirler. Küre için sonlu bir yük söz konusu olmasına rağmen, biz bu durumda sonsuz yük miktarına (sonsuz uzun bir silindir için) sahip olduğumuzdan, silindir için düşüş daha yavaştır.

(c) 0 ve r arasındaki potansiyel farkı,

$$\Delta V = - \int_0^r \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

olur. (Not: buradaki “ $d\mathbf{l}$ ” Gaussian silindrimizin daha önce söylediğimiz yüksekliği olan “ l ” ile ilgili değildir.) Burada $\mathbf{E} = E(r)\hat{r}$ ve $d\mathbf{l} = \hat{r}dr$ olduğundan,

$$\Delta V = - \int_0^r \mathbf{E}(r') \hat{r} \cdot \hat{r} dr' = - \int_0^r E(r') dr' ,$$

yazabiliriz. $0 \leq r \leq a$ için bu kolaydır. Çünkü $E(r)$ 'nin sadece bir fonksiyonel biçimine sahibiz:

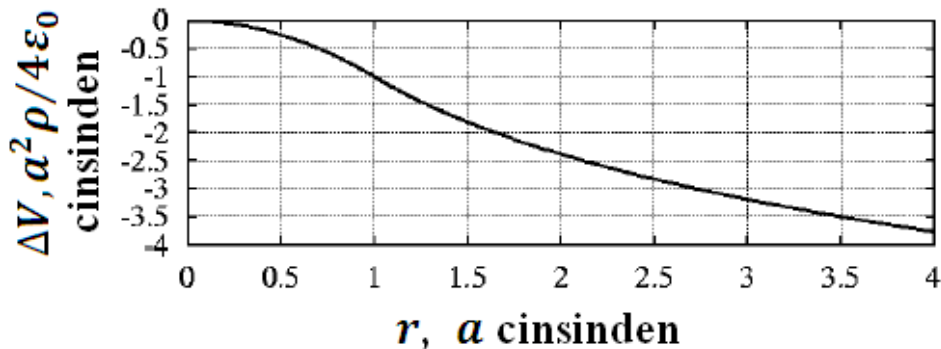
$$\Delta V = - \int_0^r \frac{r' \rho}{2\epsilon_0} dr' = - \frac{1}{2} \frac{(r')^2 \rho}{2\epsilon_0} \Big|_0^r$$

$$\Delta V = - \frac{r^2 \rho}{4\epsilon_0} \quad 0 \leq r \leq a .$$

$r > a$ için E 'nin ifadesi $r = a$ 'da değiştiğinden, integralimizi iki parçaya ayırabiliriz :

$$\begin{aligned} \Delta V &= - \int_0^a - \frac{r^2 \rho}{2\epsilon_0} dr' - \int_a^r - \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \frac{dr'}{r'} \\ &= - \frac{1}{2} \frac{(r')^2 \rho}{2\epsilon_0} \Big|_0^a - \frac{a^2 \rho}{2\epsilon_0} \ln r' \Big|_a^r \\ \Delta V &= - \frac{a^2 \rho}{4\epsilon_0} (1 + 2 \ln (r/a)) \quad r > a . \end{aligned}$$

ΔV 'nin r 'ye göre çizimi aşağıdaki gibidir:



$r \rightarrow \infty$ 'a giderken, $\Delta V \rightarrow -\infty$ 'a gittiğine dikkat ediniz. Böylece, bu durumda ΔV ∞ 'da sıfır olacak şekilde normalize edilemez. Bu, sonsuz uzun bir silindir için sonsuz miktar yük olmasından dolayıdır. Öyle ki bir test yükünü $r \rightarrow \infty$ 'dan yüzeyin içine hareket ettirmek için sonsuz miktarda iş yapılmalıdır. Ayrıca ΔV 'nin her yerde negatif olduğuna dikkat edilmelidir. Bu, ΔV 'nin 0'dan r 'ye böyle bir yükü götürmek için birim pozitif yük başına yapacağınız işi gösterdiğinden dolayıdır. \mathbf{E} alanı her zaman pozitif, dışa yönelmiş olduğundan, bu süreçte negatif iş yaparsınız: alan test yükünü dışa itiyor (ona doğru hareket ettiğiniz yönde) ve eğer onu orada tutuyorsanız, faydalı enerji elde edersiniz. Böylece "negatif" iş yaparsınız.

Problem 2.3

Elektrik alanı, Potansiye ve Elektrostatik Potansiyel Enerji. (Giancoli 23-66.)

(a) Küp merkezinin koordinatları $(x, y, z) = (l/2, l/2, l/2)$ 'dır. Böylece orijindeki bir noktasal yüke (veya tüm yükler küp merkezinden eşit uzaklıkta olduğundan herhangi bir diğer yüke) küp merkezinden olan uzaklık d ,

$$d = \sqrt{(l/2)^2 + (l/2)^2 + (l/2)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} l$$

ile verilir. Elektrostatik potansiyel üst üste gelme ilkesine uyar, bu yüzden küpün merkezindeki toplam potansiyel basitçe herhangi bir yükün potansiyelinin 8 katına eşittir. V 'yi ∞ 'da sıfır alıp ve Giancoli'nin (s. 599) denklemini (23-6a) kullanarak,

$$V_{\text{merkez}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8Q}{d} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{16Q}{\sqrt{3}l}$$

yazabiliriz.

(b) Küpün verilen herhangi bir köşesinde, bir $d_1 = l$ mesafesinde konumlanmış üç yük var, bir $d_2 = \sqrt{2}l$ uzaklıkta üç yük ve karşı köşede $d_3 = \sqrt{3}l$ uzaklıkta bir yük bulunmaktadır. Yine üstüste gelme ilkesine şükredin; ∞ 'da $V = 0$ seçerek,

$$V_{\text{köşe}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3Q}{d_1} + \frac{3Q}{d_2} + \frac{Q}{d_3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l} \left(3 + \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \approx (5,7) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{l}$$

yazabiliriz. (Bu, gözönüne alınan köşedeki nokta yükten gelen katkıyı ıçermez. Bu noktasal yük sıfır büyüklükte olsaydı, onun köşedeki potansiyele katkısı sonsuz olurdu!)

(c) (Ayrıca bir yükler sisteminin elektrostatik potansiyel enerjisi ile ilgili tartışma için Giancoli kesim 23-8'e bakınız.)

Bir noktasal yükler topluluğunun elektrostatik potansiyel enerjisi, başlangıçta tüm yükler birbirinden sonsuz uzaklıkta ise, onları bir araya getirmek için ihtiyacımız olan işe eşittir. İlk yükü getirirken iş yapmak gerekmez. İkinci yükü getirirken, 2 yükünü buraya getirdiğimizden 1'in 2 üzerine uyguladığı kuvvetten kaynaklanan W_{12} işini yaparız. Üçüncü yükü getirirken 3 üzerine 1 ve 2'nin kuvveti etkilediğinden $W_{13} + W_{23}$ işini yaparız. Dördüncü yükün getirilmesi bize $W_{14} + W_{24} + W_{34}$ işine mal olur, ve tüm yükler bir araya getirilinceye kadar bu devam eder. Bu örnekten bir noktasal yükler topluluğunun toplam elektrostatik potansiyel enerjisinin sistemdeki her bir yük çifti için bir terim olmak üzere birçok terimin toplamından oluşacağını görebiliriz:

$$U_{\text{toplam}} = W_{12} + W_{13} + W_{23} + W_{14} + W_{24} + W_{34} + \dots$$

Bu W 'leri, yükler ve yük aralıkları cinsinden nasıl ifade deedeğimizi biliyoruz. Aralarındaki uzaklık d_{ij} olan i ve j yük çiftlerini göz önüne alalım:

$$W_{ij} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i Q_j}{d_{ij}}$$

Sistemi kurarken özel bir yük sıralamasını düşünmüş olmamıza rağmen, bu yükler sisteminin potansiyel enerjisi sadece son dizilişe bağlıdır ve yüklerin getirilmesi sırasına bağlı değildir.

Bizim küp için $4QV_{\text{köşe}}$ niceliği, 7 çiftin hepsi için potansiyel enerji terimlerinin toplamını verir. Bu çiftlerin hepsi özel bir yük içerir. $8QV_{\text{köşe}}$ niceliği, böylece bu dizilişin toplam potansiyel enerjisini birbirine ekler; fakat tüm çiftler *iki kez* sayılır (kendinizi ikna edin!) Kübik dizilişin toplam potansiyel enerjisinin doğru değeri o zaman,

$$U_{\text{toplam}} = 4QV_{\text{köşe}} \simeq (22,8) \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{l}$$

olur.

Problem 2.4

Elektrik alan, potansiye ve elektrostatik potansiyel enerji.

(a) Giancoli (s. 599) denklem (23-6a)'dan herhangi bir r konumundaki elektrostatik potansiyelin

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{|r_1 - r|} + \frac{Q_2}{|r_2 - r|} + \frac{Q_3}{|r_3 - r|} \right),$$

ile verildiğini biliyoruz veya

$$V(r) = \frac{10^{-6}}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{5}{|r_1 - r|} - \frac{1}{|r_2 - r|} - \frac{2}{|r_3 - r|} \right) \text{ (SI birimlerinde)}$$

(Burada r, r_1 vs. konum vektörleridir ve böylece $|r_1 - r|$ ve benzer nicelikler vektör farklarının büyüklükleridir.)

P_1 'de:

$$|r_1 - r_{P_1}| = |r_3 - r_{P_1}| = 1 \text{ m}, \quad |r_2 - r_{P_1}| = \sqrt{2} \text{ m}$$

$$\Rightarrow V = 5,7 \times 10^4 \text{ Volt}$$

P_2 'de:

$$|r_1 - r_{P_2}| = |r_2 - r_{P_2}| = |r_3 - r_{P_2}| = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ m}$$

$$\Rightarrow V = 7,6 \times 10^4 \text{ Volt}$$

P_3 'de:

$$|r_1 - r_{P_3}| = 3 \text{ m}, \quad |r_2 - r_{P_3}| = 2 \text{ m}, \quad |r_3 - r_{P_3}| = \sqrt{5} \text{ m}$$

$$\Rightarrow V = 1,86 \times 10^4 \text{ Volt}$$

(b) V için ifademiz iki pozitif ve bir negatif olmak üzere üç terimin toplamıdır. Negatif (Q_2) yüküne yeterince yaklaşırsak, negatif terimin iki pozitif terimi yok etmeye yetecek kadar büyük olabileceği görülebilir. Böylece orada potansiyelin sıfır olduğu (aşağıdaki şekle bakınız) Q_2 'yi kuşatan yumurta-şeklinde bir yüzey olur.

(c) Aşağıdaki şekilde gösterildiği gibi, \mathbf{E} 'nin sıfır olduğu iki nokta vardır. Biri, iki pozitif yük arasında, iki alanın dengelenmediği (bu negatif yükün varlığı ile değişir) bir yerdedir. Diğeri negatif yükün sağ üstünde ve iki pozitif yükün itmesinin negatif yükün (bir pozitif test yükü için) çekimiyle tam olarak dengelendiği yerdedir.

(d) Aşağıdaki alan çizgilerine bakınız. Bu üç yük için alan çizgilerinin sayısının oranı 3 boyutlu uzayda 5:2:1'dir. Çizim 2 boyutludur; o sadece resmetmek içindir.

(e) Sistemin elektrostatik potansiyel enerjisi (Giancolide kesim 23-8'e bakınız),

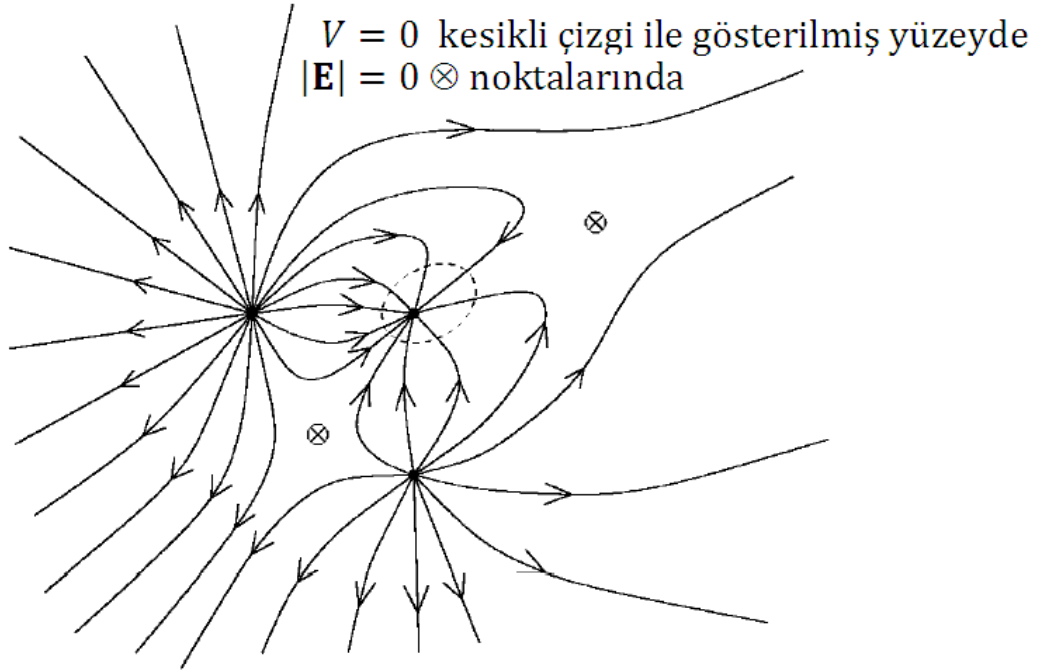
$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1Q_2}{|r_1 - r_2|} + \frac{Q_2Q_3}{|r_2 - r_3|} + \frac{Q_3Q_1}{|r_3 - r_1|} \right) \\
 &= \frac{10^{-12}}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{5}{1} - \frac{2}{1} + \frac{10}{\sqrt{2}} \right) \text{ (SI birimlerinde)} \\
 &= +6,4 \times 10^{-4} \text{ joule}
 \end{aligned}$$

(f) Yukarıdaki enerji, gösterildiği gibi, yükleri sonsuzdan son konumlarına getirmek için gerekli enerji miktarıdır. Yükleri bu şekilde serbest bırakırsak onların tümü ∞ 'a uçacaklar, tümü birbirinden sonsuz uzaklaşacaklardır. O zaman yukarıdaki $U > 0$ enerjisi, sonsuzda üç yükün kinetik enerjisine dönüştürülecektir. Bununla beraber, yüklerden biri negatif olduğundan, yükler serbest bırakıldığında bütünüyle ∞ 'a uçmayacaklardır ve onların kazandığı kinetik enerji miktarı önemli ölçüde değişecektir. Örneğin ilk önce Q_3 yükünü serbest bıraktığınızı varsayın. O diğer iki yükün oluşturduğu net \mathbf{E} -alanı yönünde hareket etmeye başlayacaktır. Bu yüzden o, doğrudan biraz güneyde bir yönde uçacaktır. Sadece verilen bilgilere dayanarak, daha sonra ne olduğunu değerlendirmek mümkün değildir. Q_3 'ün onu ∞ 'a uçuracağı tamamen mümkündür; fakat Q_2 'de son bulacağını mümkün olduğunu kabul edemeyiz.

Q_3 'ün yörüngesi, sadece diğer iki yükün oluşturduğu E -alanının düzenlenişine bağlı olmayacak, Q_3 'ün kütlesine de bağlı olacaktır. Farklı kütleler farklı ivme kazanacaklar ve bu nedenle farklı yörüngelere sahip olacaklardır. Q_3 'ün kütlesi çok büyük olsaydı, Q_3 , onun başlangıç noktası boyunca giderken alan çizgisini yakından takip edecekti. Bununla beraber, kütlesi küçük olsaydı, derhal bu alan çizgisini terk edecekti.

Şimdi Q_2 'yi serbet bırakın (Q_3 'ün gerçekte ∞ 'a uçtuğunu varsayın). Bu yük Q_1 'e çekilecek ve doğrudan ona çarpacaktır. Bunlar gerçek noktasal yükler olsalardı, Q_2 'nin kinetik enerjisi $|r_1 - r_2| \rightarrow 0$ giderken sonsuz olacaktı.

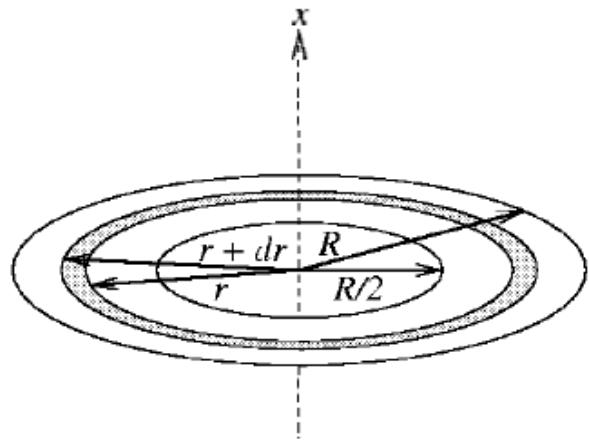
Aksine, ilk olarak Q_2 yükünü serbest bırakırsanız, o Q_1 etrafında karmaşık bir yörünge oluşturarak Q_1 'e bağlanacaktır. Eğer Q_3 yükü, Q_2 , Q_1 'e bağlı yörüngesinde iken tam zamanında bırakılırsa, Q_1 ve Q_2 'yi birbirinden ayırarak Q_3 sonsuza uçabilir. Böylece bu sorunun -tamamı sıfırdan büyük- sonsuz sayıda cevabı vardır, ama diğer bakımdan iyi tanımlı değildir.



Problem 2.5

Ortası delik düz bir halkanın elektrik potansiyeli. (Giancoli 23-78.)

Bu problem Giancolide Örnek 23-9 (s. 599)'a çok benzerdir. Disk düzlemi içinde $x = 0$ olarak alarak, diski birçok sonsuz küçük ince yük halkalarına böleriz ve simetri eksenini üzerinde (şekle bakınız) tüm halkaların potansiyele katkılarını toplarız.



Disk Q yükü taşır ve $\pi R^2 - \pi(R/2)^2 = 3\pi R^2/4$ yüzey alanına sahiptir. Bu nedenle onun yüzey yük yoğunluğu $\sigma = 4Q/3\pi R^2$ olur. r yarıçaplı ve dr kalınlıklı (çizime bakınız) sonsuz küçük halkanın alanı $2\pi r dr$ olur ve böylece $dq = \left(\frac{4Q}{3\pi R^2}\right)(2\pi r dr) = 8Qr dr/3R^2$ lık yük taşır. Bu yüklü halkaların tümü x -ekseni üzerinde verilen bir noktadan $\sqrt{x^2 + r^2}$ uzaklıkta olur ve halkaların bu noktadaki potansiyele katkıları böylece,

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8Q}{3R^2} \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}}$$

olur. Toplam potansiyeli bulmak için bu ifadenin tüm disk üzerinden, $r = R/2$ 'den $r = R$ 'ye integralini alırız:

$$\begin{aligned} V &= \int dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8Q}{3R^2} \int_{R/2}^R \frac{r dr}{\sqrt{x^2 + r^2}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{8Q}{3R^2} \int_{\sqrt{x^2 + R^2/4}}^{\sqrt{x^2 + R^2}} du \quad (u = \sqrt{x^2 + r^2} \text{ yi yerine yazdıktan sonra}) \\ &= V(x) = \frac{2Q}{3\pi\epsilon_0 R^2} \left(\sqrt{x^2 + R^2} - \sqrt{x^2 + R^2/4} \right). \end{aligned}$$

Problem 2.6

Elektriksel boşalma (kıvılcım atlaması) alanları.

(a) Küremizin yarıçapı a olsun. Yüklü iletken küre ile ilgili önceki çalışmalarımızdan küre yüzeyinin hemen dışındaki elektrik alanının

$$E(r = a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

ile ve onun yüzeyinde potansiyelin (∞ 'a göre)

$$V(r = a) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a}$$

ile verildiğini biliyoruz. Bu iki denklemden $r = a$ 'da E ve V arasındaki bağıntıyı kolayca elde edebiliriz.

$$E(r = a) = \frac{V(r = a)}{a} .$$

Sabit -4000 V'luk bir potansiyel için a küçüldükçe, yüzeydeki E o kadar büyük olur. E için 3×10^6 V/m den daha küçük bir büyüklüğe sahip olmak için

$$a > \frac{4000}{3 \times 10^6} = 1,33 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$\Rightarrow a > 1,33 \text{ mm}$ boşalma olamaması için

olmalıdır.

(b) Yukarıdan $Q = 4\pi\epsilon_0 aV$ 'dir; veya bizim değerlerimiz için $Q = -6 \times 10^{-10}$ Coulombdur.

(c) Kürenin hemen dışında, hava içinde bir elektron elektrik alan tarafından küreden radyal yönde uzaklaşacak şekilde ivmelendirilecektir. Eğer 3×10^6 V/m büyüklüğünde sabit bir elektrik alan içinde hareket etseydi, yeterli bir l mesafesinde 10 eV'luk bir enerji toplayacaktı.

$$e(3 \times 10^6)l = (10)e .$$

Bu denklem basitçe kuvvet (qE) çarpı yol eşittir enerji denklemdir. Burada 1 eV (joule cinsinden) bir elektron yükü (Coulomb) çarpı 1 Volt'a eşittir gerçeğini kullandık. Yukarıdaki denklemi l için çözersek,

$$l = \frac{10}{3 \times 10^6} = 3,3 \times 10^{-6} \text{ m} .$$

elde ederiz. Şimdi gerçekte küre dışında E alanı sabit değildir, elbetteki $1/r^2$ ile azalır. Fakat $3,3 \times 10^{-6} \text{ m}$ de o çok küçük bir miktarda azalır; bu nedenle l mesafesi boyunca sabit bir alan varsayımı çok iyi bir varsayımdır.

(d) (c)'deki sonuçtan, ortalama serbest yol 10^{-6} m ise, bir elektronun üç veya buna yakın ortalama serbest yol içinde 10 eV kazanabileceği sonucunu çıkarabiliriz.

Elektrik “boşalmasını” (breakdown) aşağıdaki gibi anlayabiliriz: Bir hava molekülünü iyonize etmek için $\sim 10 \text{ eV}$ ’luk enerji gerekir. $E \ll 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ise, havadaki bir “başıboş” elektron çarpışmalar arasında enerji toplayacaktır. Fakat bu enerji çarpışma sırasında bir hava molekülünü iyonize etmeye yetmeyecektir. Eğer $E > 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ ise bu “başıboş” elektron bir hava molekülünü iyonize etmeye yetecek enerjiyi toplayacaktır. Bu bize iki serbest elektron verir. Bu elektronlar daha sonra 4 ve daha sonra 8 elektron vs. olacaktır. Bu çağlayan veya zincir reaksiyon sonunda bir kıvılcım kadar büyük bir makroskobik ölçeğe ulaşacaklar ve küre kısmen hava boyunca boşalacaktır.

Problem 2.7

5,2 keV’lik fotonlar.(Giancoli 23-72).

(a) $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ parçacıklar üzerine etkiyen elektrik alanı gösterebiliriz. Herhangi bir \mathbf{r} konumunda protonlar üzerine etkiyen kuvvet $e\mathbf{E}(\mathbf{r})$ (burada, $e > 0$ elektron veya protonun yükünün büyüklüğüdür) olacaktır. P den Q noktasına giderken protonun kazandığı enerji böylece,

$$(KE)_P = \int_P^Q e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} = 5,2 \text{ keV} .$$

olur. Verilen herhangi bir \mathbf{r} noktasında elektrona etkiyen kuvvet $-e\mathbf{E}(\mathbf{r})$ olacaktır ve böylece Q’dan P’ye hareketinde onun kazanacağı enerji

$$(KE)_e = \int_Q^P [-e \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q [-e \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot (-d\mathbf{l}) = \int_P^Q e \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l} .$$

olacaktır. Böylece biz

$$(KE)_e = (KE)_P = 5,2 \text{ keV} .$$

olduğunu göreceğiz.

(b)

$$1 = \frac{(KE)_e}{(KE)_P} = \frac{m_e v_e^2 / 2}{m_p v_p^2 / 2}$$

$$\Rightarrow \frac{v_e}{v_p} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}} = \sqrt{\frac{1,67 \times 10^{-27}}{9,11 \times 10^{-31}}} \approx 43$$

ifadesinden parçacık hızlarının oranını bulabiliriz.

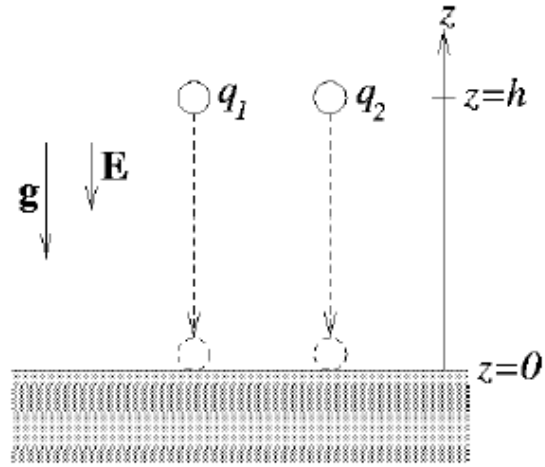
Problem 2.8

Yerin elektrik alanında düşen yüklü cisimler.(Giancoli 23-74).

z -yönünü düşey yukarı alacağız ve yer seviyesini $z = 0$ da seçeceğiz (şekle bakınız). Herbir topun kütleçekim potansiyel enerjisi o zaman

$$U_{grav}(z) = mgz$$

($z = 0$ 'da $U_{grav} = 0$ olarak) olacaktır.



Verilen elektrik alanından, orada elektrik alanın $E = 150 \text{ V/m}$ olduğu ($z = 0$ da $V = 0$ olarak) bir $V(z) = Ez$ elektrik potansiyeli oluşturabiliriz. Bu iki topun elektrostatik potansiyel enerjileri o zaman

$$U_{elek,1} = q_1 Ez \quad U_{elek,2} = q_2 Ez$$

olur. Başlangıç durumu $z = h = 2,00 \text{ m}$ 'den $z = 0$ 'daki son duruma enerjinin (mekanik ve elektrostatik) korunumu bu iki top için

$$mv_1^2 = mgh + q_1 Eh$$

$$mv_2^2 = mgh + q_2 Eh ,$$

verir. Bu ifadelerin çözümünden,

$$v_1 = \sqrt{2gh + 2q_1 E h/m}$$

$$v_2 = \sqrt{2gh + 2q_2 E h/m} .$$

elde edilir. Problemden verilen sayısal değerler için,

$$v_1 = \sqrt{39,24 + 0,61} m/s$$

$$v_2 = \sqrt{39,24 - 0,61} m/s ,$$

elde edilir. Bu değerlerden

$$\Delta v = v_1 - v_2 = 0,097 m/s = 9,7 cm/s .$$

bulunur.

Bu ifade $v_1 > v_2$ için uygundur, çünkü pozitif yüklü ilk topa çekim kuvveti ile birlikte aşağı doğru bir elektrik alan kuvveti etki ederken, negatif yüklü ikinci topa çekim kuvvetine zıt, yukarı doğru bir kuvvet etkiyecektir.

END