Adam S. Bolton
bolton@mit.edu

15 Mayıs 2002

MIT 8.02, Bahar 2002
Ödev # 11 Çözümler

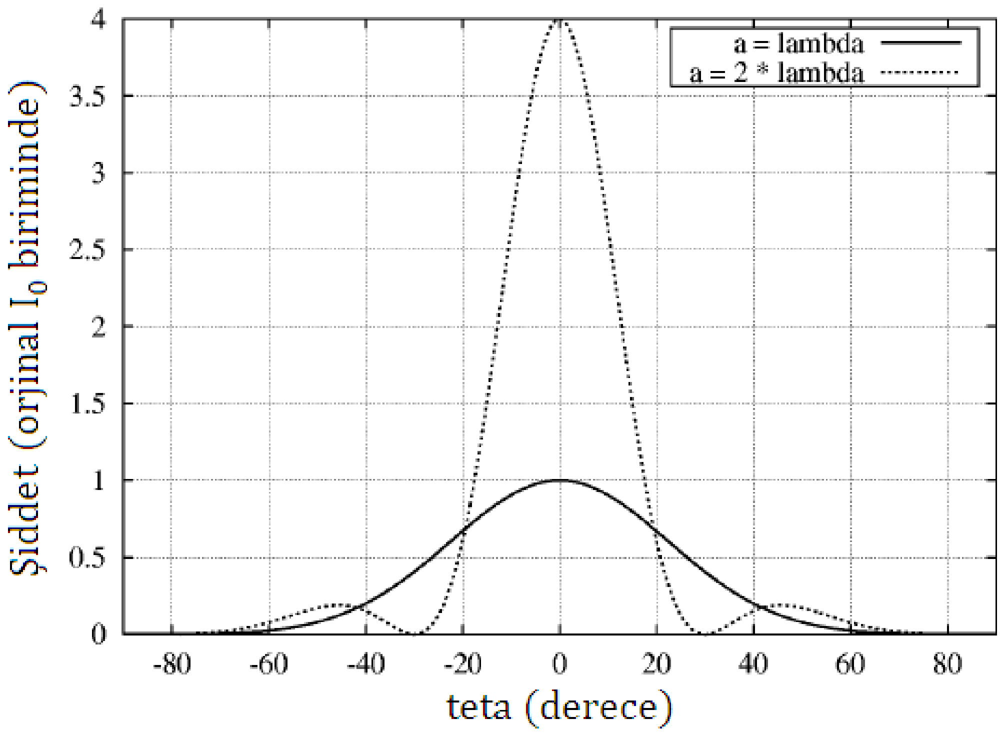
Problem 11.1

Tek yarıkta kırınım. (Giancoli 36-9.)

(a) Bir tek yarığın genişliğini iki katına çıkarırsanız, E_0 elektrik alan dalga genliği ekranın ortasında iki kat olacaktır. Ekranın ortasında I_0 ışık şiddeti E_0^2 ile orantılı olacağından, I_0 bir 4 çarpanı kadar artacaktır.

(b) $\theta = 0$ civarında şiddet keskin bir doruk yapacağından, enerji korunumu çiğnenir. Mesela, yarık genişliği a iki katına çıktığı zaman (λ dalgaboyu sabit tutulduğu zaman), ilk minimumun açısal konumunun ($\sin\theta = \lambda / a$ ile verilen) azalacağına dikkat edilmelidir.

Aşağıdaki θ 'ya karşı I_0 ın grafiği $a = \lambda \rightarrow a = 2\lambda$ için durumu sergilemektedir. Herbir eğri için yayınlanan toplam güç, eğri altındaki alanla orantılıdır. $a = 2\lambda$ eğrisi $a = \lambda$ eğrisinden dört kat daha yüksek bir doruğa sahip olmasına rağmen, alttaki alan, $a = \lambda$ eğrisi altındaki alanın iki katından daha fazla olduğu görülebilir. Bu enerji korunumu beklentisi ile uyuşmaktadır.



Problem 11.2

Kırınım Ağları – Fizik ve mum ışığı – Ev deneyi II.

(a) Yarık aralığı milimetredeki çizgi sayısının tersidir:

$$d = \frac{1}{1000\ m^{-1}} = 10^{-6}\ m = 10{,}000\ \text{Å}$$

(b) Bir kırınım ağından maksimumların açısal konumu Giancoli Denklemi (36-13) (s. 900) ile verilir:

$$sin\theta = \frac{m\lambda}{d}$$

Kırmızı ve mavi ışığın birinci mertebe ($m = 1$) konumları:

$$\theta_{1,kırmızı} = \arcsin\left(\frac{6{,}300}{10{,}000}\right) = 39{,}1°,\ \ \theta_{1,mavi} = \arcsin\left(\frac{4{,}500}{10{,}000}\right) = 26{,}7°,$$

Ve birinci mertebe kırmızı ve mavi çizgiler arasındaki açı:

$$\Delta\theta_{1,kırmızı-mavi} = \theta_{1,kırmızı} - \theta_{1,mavi} = 12{,}3°$$

(c) $\sin\theta$ 1'den büyük olamaz; bu nedenle verilen bir λ dalgaboyu ve d aralığı için olası en yüksek m mertebesi, en büyük tamsayıdır; öyleki $m\lambda/d$ hala 1'e eşit veya 1'den küçüktür. $m\lambda/d \leq 1 \Rightarrow m \leq d\ /\ \lambda$ olduğundan kırmızı ve mavi ışıklar için,

$$d/\lambda_{kırmızı} = \frac{10{,}000}{6{,}300} \cong 1{,}6 \Rightarrow m_{maks,kırmızı} = 1$$

$$d/\lambda_{mavi} = \frac{10{,}000}{4{,}500} \cong 2{,}2 \Rightarrow m_{maks,mavi} = 2$$

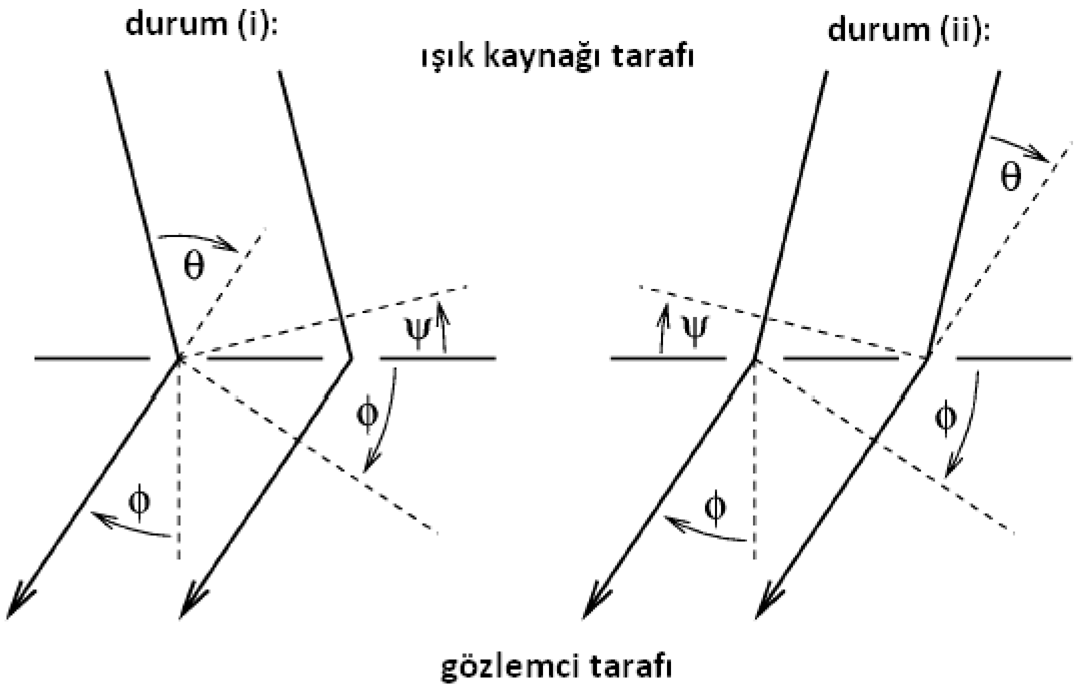
buluruz.

(d) Sıfırıncı mertebeden spektrum beyazdır; o tüm renkleri ihtiva eder, açısal ayrılmamış.

(e) Karanlık bir odada mum ışığını gözlediğimde kırmızı ve mavinin birinci dereceden maksimumlarını çok kolay görebilirim. Ayrıca ikinci derece mavi maksimumu da görebilirim (çok sönük olmasına rağmen). Bu (c)'nin sonucuyla uyuşur.

(f) $l = 24$ inç için, $L = 341/4$ inç bulurum. Bu birinci mertebe kırmızı maksimumu için $\tan\theta = l/L = 0{,}70 \Rightarrow \theta = 35°$ verir. Bu tam $39°$ değil, ama kabaca ona yakındır. Kırmızı olduğuna karar verdiğim renk muhtemelen $6{,}300$ Å dalga boylu turuncudur.

(g) Burada anlaşılan iki farklı durumu göz önüne almalıyız. Işık kaynağının sağında gözüken yüksek mertebeden maksimumları gözlemlediğimizi varsayın. (i) durumunda kaynaktan uzakta sağ tarafta ve kaynağa doğru kırınım ağının sol tarafına hareket ettirerek düşey eksen etrafında bir ψ açısı kadar ağı döndürürüz. (ii) durumunda kaynağın sağ tarafına doğru ve kaynaktan uzakta sol tarafa hareket ederiz. Işık kaynağı (yani sıfırıncı mertebeden maksimum) ve daha yüksek mertebeden maksimumlar arasındaki açıyı θ olarak alırız: Bu, bizim doğrudan gözlemlediğimiz açıdır. Ayrıca ağa göre kırılmış ışınların açısını ϕ olarak tanımlayalım. Yarık aralığı d olsun. Bu durum aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



İlkönce (i) durumunu düşünün. Soldaki ışığa göre sağdaki ışık, ağın kaynak tarafında $d\sin\psi$ ve gözlemci tarafında $d\sin\phi$ diğer bir ilave bir yola sahiptir. Bu yüzden yapıcı girişimin koşulu (ve böylece bir maksimumun gözükmesi) $d\sin\phi + d\sin\psi = m\lambda$ olur. Bir sonraki durumu, (ii) durumunu düşünün. Şimdi sağdaki ışık hala gözlemci tarafında $d\sin\phi$ ilave bir yola sahipken *soldaki* ışık kaynak tarafında $d\sin\psi$ ilave yoluna sahiptir. Bir maksimumun gözükmesinin koşulu şimdi) $d\sin\phi - d\sin\psi = m\lambda$ dır.

Geometriden (i) durumunda $\theta = \phi + \psi$ ve (ii) durumunda $\theta = \phi - \psi$ sonucuna varırırız. (i) ve (ii) durumları için yapıcı girişim koşulu o zaman,

$$\sin(\theta - \psi) + \sin\psi = \frac{m\lambda}{d} \text{ (i) durumu için,}$$

$$\sin(\theta + \psi) - \sin\psi = \frac{m\lambda}{d} \text{ (ii) durumu için.}$$

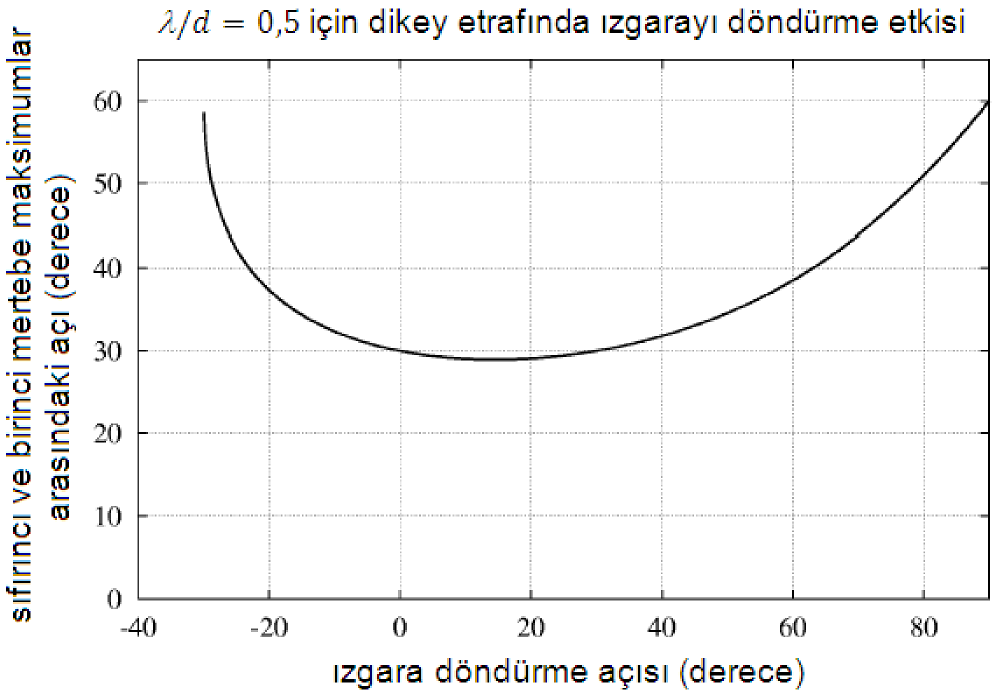
olarak yeniden ifade edilebilir.

Durum (i)'yi pozitif ψ değerlerine ve durum (ii)'yi negatif ψ değerlerine karşılık alırsak her iki koşul, durum (i) koşulu biçimini alır. Bu ifadenin çözümü,

$$\theta = arcsin\left(\frac{m\lambda}{d} - \sin\psi\right) + \psi$$

olur.

Şimdi kırınım ağımız için bazı sayısal değerler alalım: $m = 1, \lambda = 5000\ \text{Å}\ ve\ d = 10000\ \text{Å}$ alarak $m\lambda/d = 0{,}5$ buluruz. ψ'nin fonksiyonu olarak θ'yı çizersek (aşağıda gösterilmiştir) sıfırdan ψ'yi artırdığımızda, θ'nın ilk önce hafifçe *azaldığını* sonra tekrar artmaya başladığını görürüz. $\psi = 0$'dan negatif ψ değerlerine doğru gittiğimizde θ'nın aniden artar. Ayrıca $\psi = -30^\circ$'de bir teklik (eşsizlik) olduğuna ve onun ötesinde ters sin fonksiyonunun 1'i geçtiğine ve birinci derece maksimumun artık olmadığına dikkat edilmelidir.



Problem 11.3

Kırınım, girişim ve iki elemanlı girişimölçerlerin açısal çözünürlüğü.

(a) Giancoli denklem (36-10) (s. 897), $100\,ft = 3048\ cm$ çaplı bir tek radyo teleskopunun $21\ cm$ dalgaboyunda açısal çözünürlüğünü verir:

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{(1{,}22)21}{3048} = 8{,}4 \times 10^{-3}\ rad = 0{,}48 \simeq 1700\ arcsec.$$

$(1^\circ = 3600\ arcsec.)$

(b) Bir girişimölçer olarak çalışan bir çift teleskopun açısal çözünürlüğünü tayin etmek için, iki yarık deneyine bir benzetme yaparız. Açısal çözünürlük, Giancoli Deklem (36-9) (s.894) ile tanımlanan kırınım/girişim örneğinde ilk minimumun konumuna göre kurulacaktır. Etkin $d = 1\ km$'lik "yarık genişliği", etkin $100\ ft$'lik "yarık genişliğinden" çok daha büyük olduğundan, bu ilk minimum $\cos^2(\delta/2)$ çarpanı sıfıra gittiğinde meydana gelecektir:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi}{\lambda} d\ \sin\theta \Longrightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{2d} = \frac{0{,}21}{(2)1000} = 1{,}05 \times 10^{-4}\ .$$

Küçük açılar için $\sin\theta \cong \theta$ olduğundan,

$$\theta = 1{,}05 \times 10^{-4}\ rad = (6{,}0 \times 10^{-3})^\circ = 22\ arcsec$$

elde ederiz. Aşısal çözünürlük için büyük bir gelişme.

Problem 11.4

Sesin yıkıcı girişimi. (Giancoli 36-55.)

Işık dalgası yerine ses dalgası ile tek yarıkta kırınım problemini alarak bunu idealize edebiliriz. Yarık genişliğimiz $a = 0{,}88\ m$ ve dalga frekansımız $f = 750\ Hz$'dir. Sesin havadaki hızı için $\upsilon = 344\ m/s$ alacağız. Islık, kırınım deseninde (Giancoli Denklem (36-2), s889) minimumların açısal konumunda açıkça işitilmeyecektir:

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{a} = m\frac{v}{f_a} = m\frac{(344)}{(0{,}88)(750)} = (0{,}52)m\ .$$

Bir çözüm veren sıfırdan farklı tek m tamsayısı, $m = 1$'dir ($\sin\theta \leq 1$ olması gerektiğinden). Böylece ideal bir çözümde,

$$\theta = \arcsin(0{,}52) = 31^\circ \ .$$

derecede ıslık duyulmayacaktı.

Problem 11.5

İnsan gözünün çözme (ayırma) gücü. (Giancoli 36-65.)

500 nm dalgaboyunda, insan gözünün (çapı 5,0 mm varsayılır) kırınım sınırı açısal çözünürlüğü,

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{(1{,}22)(5\times10^{-7})}{(5{,}0\times10^{-3})} = 1{,}22\times10^{-4}\ rad = 0{,}42\ arcmin\ \ (1^\circ = 60\ arcmin).$$

(a) Sadece kırınım etkisini düşünüldüğünde, insan gözü, kendisinden L uzaklıkta bulunan ve aralarındaki d uzaklığı yukarıdaki açısal çözünürlük sınırına eşit bir θ açısı oluşturduğu zaman bu iki farı güç bela ayırabilecektir.

$$(k\ddot{u}\c{c}\ddot{u}k\ a\c{c}\imath{:})\quad d = L\theta \quad L = \frac{d}{\theta} = \frac{2{,}0\ m}{1{,}22} \simeq 16\ km$$

(b) Tekrar sadece kırınım etkisi göz önüne alındığında, insan gözünün seçebileceği minimum açısal yıldız ayrılması $0{,}42\ arcdakika$ (1yaydakika $= 1/60$ derece) değerinin üzerinde olacaktır. Gözün *gerçek* açısal çüzünürlüğü, retinadaki ışık-algılayıcılarının sonlu yoğunluğundan dolayı, $1arcdakika$ kadardır. Gerçekte derslerde gösterildiği gibi, birçok öğrenci bile 1 yaydakikası aralıklı eşit şiddetli iki ışığı çözemez.

Problem 11.6

Optik teleskopların çözme (ayırma) gücü.

(a)

$$\theta = \frac{1{,}22\lambda}{D} = \frac{(1{,}22)(4{,}5\times10^{-7})}{2{,}4} = 2{,}3\times10^{-7}\ rad = 0{,}047\ arcsec$$

(b) Derslerde tartışıldığı ve ayrıca Giancoli Örnek 36-5 (s. 897) de gösterildiği gibi, yer-tabanlı teleskopların açısal çözünürlüğü Yer'in atmosferindeki hava akımından (turbülanstan) dolayı yaklaşık $\frac{1}{2}\ arc\ saniyeye$ sınırlıdır.

(c) Derslerde bahsedildiği gibi (bakınız Giancoli Örnek 36-5), Hubble Uzay Teleskobunun açısal çözünürlüğü atmosferik etkilerle değil kırınımla sınırlıdır. Bu yüzden $4{,}5 \times 10^{-7}\ m$ dalga boyu için (a) şıkkındaki $0{,}047\ arcsaniye$ çözünürlüğüne sahiptir.

(d) (önceki şıklara bakınız).

Problem 11.7

Işığının Doppler kayması I. (Giancoli 37-56)

Uzaklaşan kaynaklar için Doppler-kayması formülünü (Giancoli Denklem (37-15b), s. 943) bağıl uzaklaşma hızı için cebirsel olarak çözebiliriz:

$$f = f_0\sqrt{\frac{c-v}{c+v}} \Rightarrow v = \left[\frac{1-(f/f_0)^2}{1+(f/f_0)^2}\right]c$$

Bize $f_0 - f = 0{,}797 f_0 \Rightarrow f/f_0 = 0{,}203$ verildiğinden,

$$v = \left[\frac{1-(0{,}203)^2}{1+(0{,}203)^2}\right]c = 0{,}912c = 2{,}76 \times 10^8\ m/s$$

bulunur.

Problem 11.8

Işığın Doppler kayması II. (Giancoli 37-56)

$v \ll c$ ise $v/c \ll 1$ olur. v/c'de birinci-mertebeden hassasiyet için çalışarak ve Giancoli Denklem (37-15a) (s. 943)'ü kullanarak:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda-\lambda_0}{\lambda}$$

$$= 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

$$= 1 - \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}$$

$$\simeq 1 - \sqrt{(1-v/c)(1-v/c)}$$

$$\simeq 1-\sqrt{1-2v/c}$$
$$\simeq 1-(1-v/c)$$
$$=\frac{v}{c}$$

elde edilebilir.

SON