MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği
2007 Güz

VII.F Yozlaşmış Bose Gazı

Ortalama bozon doluluk sayısı,

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle_+ = \frac{1}{\exp\left[\beta\left(\mathcal{E}(\vec{k}) - \mu\right)\right] - 1}, \tag{VII.50}$$

her zaman pozitif olmalıdır. Bu, tüm $\vec{k}$'lar için $\mathcal{E}(\vec{k}) - \mu$'nin pozitif olmasını ve dolayısıyla ($\mathcal{E}(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/2m$ için) $\mu < \min\,[\mathcal{E}(\vec{k})]_{\vec{k}} = 0$ koşulunu gerektirir. Yüksek sıcaklıklarda (klasik limit), μ değeri büyük ve *negatiftir* ve sıcaklık azaldıkça $-k_B T \ln(n\lambda^3/g)$ şeklinde sıfıra yaklaşır. Yozlaşmış kuantum limitinde μ, limit değeri sıfıra yaklaşır. Bu limitin nasıl elde edildiğini görmek ve yozlaşmış bose gazının davranışını anlamak için $z = \exp(\beta\mu)$ bire giderken denklem (VII.35)'deki $f_m^+(z)$ fonksiyonlarının limitteki davranışlarını incelememiz gerekir.

$f_m^+(z)$ fonksiyonları, $0 \le z \le 1$ aralığındaki z değeri ile monoton biçimde artmaktadır. $z = 1$ iken elde edilen maksimum değer şöyledir,

$$\zeta_m \equiv f_m^+(1) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{dx\; x^{m-1}}{e^x - 1}. \tag{VII.51}$$

Integrandın $x \to 0$ limitinde bir kutbu bulunur ve burada $\int dx x^{m-2}$ şeklinde davranır. Bu nedenle ζ_m, $m > 1$ değerleri için sonlu; $m < 1$ için sonsuzdur. Bu fonksiyonların yararlı tekrarlamalı bir özelliği ($m > 1$) için) şöyledir,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz} f_m^+(z) &= \int_0^\infty dx\; \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^{-1}e^x - 1}\right) \\
&\qquad \left(\text{use}\quad \frac{d}{dz} f\left(z^{-1}e^x\right) = -\frac{e^x}{z^2} f' = -\frac{1}{z}\frac{d}{dx} f\left(z^{-1}e^x\right)\right) \\
&= -\frac{1}{z}\int_0^\infty dx\; \frac{x^{m-1}}{(m-1)!}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{z^{-1}e^x - 1}\right) \qquad \text{(kısmi integral alarak)} \\
&= \frac{1}{z}\int_0^\infty dx\; \frac{x^{m-2}}{(m-2)!}\frac{1}{z^{-1}e^x - 1} = \frac{1}{z} f_{m-1}^+(z).
\end{aligned} \tag{VII.52}$$

Bu nedenle, $f_m^+(z)$'nin yeterinde yüksek bir türevi, tüm m değerleri için $z = 1$'de ıraksak olacaktır.

Dolayısıyla, üç boyuttaki göreceli olmayan bose gazının *uyarılmış durumlarının* yoğunluğu şu şekilde sınırlanır,

$$n_\times = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}^+(z) \le n^* = \frac{g}{\lambda^3}\zeta_{3/2}. \tag{VII.53}$$

Yeterince yüksek sıcaklıklarda,

$$\frac{n\lambda^3}{g} = \frac{n}{g}\left(\frac{h}{\sqrt{2\pi m k_B T}}\right)^3 \leq \zeta_{3/2} \approx 2.612\cdots, \qquad \text{(VII.54)}$$

bu sınır ilgili değildir ve $n_\times = n$. Ancak, sıcaklığı düşürünce uyarılan durumların limit değeri şöyle elde edilir,

$$T_c(n) = \frac{h^2}{2\pi m k_B}\left(\frac{n}{g\zeta_{3/2}}\right)^{2/3}. \qquad \text{(VII.55)}$$

$T \leq T_c$ için z, $(\mu = 0)$ bir değerinde kalır. Uyarılan durumların limitteki yoğunluğu, $n^* = g\zeta_{3/2}/\lambda^3 \propto T^{3/2}$, toplam parçacık yoğunluğundan azdır. $n_0 = n - n^*$ yoğunluğuna sahip geri kalan gaz parçacıkları, $\vec{k} = 0$ ile en düşük enerji durumunu doldurur. Tek bir bir-parçacık durumunun *makroskopik doldurumu* olgusu *Bose Einstein yoğuşması* olarak bilinir. $T < T_c$, için gaz basıncı,

$$\beta P = \frac{g}{\lambda^3} f^{+}_{5/2}(1) = \frac{g}{\lambda^3}\zeta_{5/2} \approx 1.341\frac{g}{\lambda^3}, \qquad \text{(VII.56)}$$

$T^{5/2}$ biçiminde sıfıra gider ve *yoğunluktan bağımsız*dır. Bunun nedeni, sadece uyarılmış kısım n^*'ın sıfırdan farklı momentuma sahip olması ve basınca katkı yapmasıdır. Buna alternatif olarak, bose yoğuşması yoğunluğu artırarak (hacmin azalmasıyla) sabit bir sıcaklıkta elde edilebilir. (VII.54) denkleminden, geçiş özgül bir hacimde ortaya çıkar,

$$v^* = \frac{1}{n^*} = \frac{\lambda^3}{g\zeta_{3/2}}. \qquad \text{(VII.57)}$$

$v < v^*$ için, basınç-hacim eşısıl eğrisi yataydır, çünkü (VII.56) denkleminde $\partial P/\partial v \propto \partial P/\partial n = 0$. Eşısıl eğrisinin yatay kısmı, birlikte yer alan sıvı ve gaz fazların hatırlatıcısıdır. Benzer biçimde, bose yoğuşmasını da v^* özgül hacimli bir "normal gaz" ile 0 hacimli bir "sıvının" bir arada bulunması olarak alabiliriz. Parçacıklar arasındaki her hangi bir etkileşme bulunmamasına bağlı olarak "sıvı" hacminin sıfır olması gerçekçi olmayan bir özelliktir.

Bose yoğuşması, süreksiz (birinci derece) ve sürekli (ikinci derece) geçişlerin özelliklerini bir araya getirir; sıkışabilirlik ıraksarken, sonlu bir latent ısı mevcuttur. Geçişin latent ısısı, geçiş sıcaklığının basınçla değişimini aşağıdaki şekilde veren *Clausius-Clapeyron* denkleminden elde edilebilir,

$$\left.\frac{dT}{dP}\right|_{\text{Coexistence}} = \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{T_c(v^* - v_0)}{L}. \tag{VII.58}$$

Denklem (VII.56), gaz basıncını tam geçiş noktasına kadar verdiği için,

$$\left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{Coexistence}} = \frac{5}{2}\frac{P}{T}. \tag{VII.59}$$

Yukarıdaki denklemleri kullanarak, latent ısıyı bulabiliriz,

$$\begin{aligned} L = T_c v^* \left.\frac{dP}{dT}\right|_{\text{Coexistence}} &= \frac{5}{2}Pv^* = \frac{5}{2}\frac{g}{\lambda^3}\zeta_{5/2}k_BT_c\left(\frac{g}{\lambda^3}\zeta_{3/2}\right)^{-1}, \\ \Longrightarrow \qquad L &= \frac{5}{2}\frac{\zeta_{5/2}}{\zeta_{3/2}}k_BT_c \approx 1.28k_BT_c. \end{aligned} \tag{VII.60}$$

$\kappa_T = \partial n/\partial P|_T/n$ sıkışabilirliğini bulmak için, (VII.35) denklemlerinin türevlerini alınız ve aşağıdaki sonucu elde etmek için (VII.52) denkleminden yararlanınız,

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dz} = \dfrac{gk_BT}{\lambda^3}\dfrac{1}{z}f^+_{3/2}(z) \\ \dfrac{dn}{dz} = \dfrac{g}{\lambda^3}\dfrac{1}{z}f^+_{1/2}(z) \end{cases}. \tag{VII.61}$$

Bu denklemlerin oranı aşağıdaki eşitliğe götürür,

$$\kappa_T = \frac{f^+_{1/2}(z)}{nk_BT f^+_{3/2}(z)}, \tag{VII.62}$$

bu da, $\lim_{z\to 1} f^+_{1/2}(z) \to \infty$ olduğu için geçişte ıraksar; yani, eşısıl eğrileri yatay birliktelik bölgesine teğet olarak yaklaşır.

Büyük kanonik topluluktaki enerji için verilen ifadeden yola çıkarak,

$$E = \frac{3}{2}PV = \frac{3}{2}V\frac{g}{\lambda^3}k_BT f^+_{5/2}(z) \propto T^{5/2} f^+_{5/2}(z), \tag{VII.63}$$

ve (VII.52) denklemi kullanılarak, ısı sığası aşağıdaki şekilde elde edilir,

$$C_{V,N} = \left.\frac{dE}{dT}\right|_{V,N} = \frac{3}{2}V\frac{g}{\lambda^3}k_BT\left[\frac{5}{2T}f^+_{5/2}(z) + \frac{1}{z}f^+_{3/2}(z)\left.\frac{dz}{dT}\right|_{V,N}\right]. \tag{VII.64}$$

Sabit parçacık sayısı koşulundan,

$$\left.\frac{dN}{dT}\right|_{V} = 0 = \frac{g}{\lambda^3}V\left[\frac{3}{2T}f^+_{3/2}(z) + \frac{1}{z}f^+_{1/2}(z)\left.\frac{dz}{dT}\right|_{V,N}\right]. \tag{VII.65}$$

kullanılarak $dz/dT|_{V,N}$ türevi bulunur.

$$\frac{T}{z}\frac{dz}{dT}\bigg|_{V,N} = -\frac{3}{2}\frac{f^+_{3/2}(z)}{f^+_{1/2}(z)},$$

çözümünün denklem (VII.64)'e yerleştirilmesi,

$$\frac{C_V}{Vk_B} = \frac{3}{2}\frac{g}{\lambda^3}\left[\frac{5}{2}f^+_{5/2}(z) - \frac{3}{2}\frac{f^+_{3/2}(z)^2}{f^+_{1/2}(z)}\right]. \tag{VII.66}$$

eşitliğini doğurur. Sonucun z'nin kuvvetlerinde açılması, yüksek sıcaklıklarda ısı sığasının klasik değerden büyük, $C_V/Nk_B = 3/2[1 + n\lambda^3/2^{7/2} + \cdots]$ şeklinde olduğunu gösterir. Düşük sıcaklıklarda $z = 1$ ve

$$\frac{C_V}{Nk_B} = \frac{15}{4}\frac{g}{n\lambda^3}\zeta_{5/2} = \frac{15}{4}\frac{\zeta_{5/2}}{\zeta_{3/2}}\left(\frac{T}{T_c}\right)^{3/2}. \tag{VII.67}$$

Düşük sıcaklıklardaki $T^{3/2}$ davranışının kaynağını anlamak kolaydır. $T = 0$ iken, tüm parçacıklar $\vec{k} = 0$ durumunu doldurur. Düşük fakat sonlu sıcaklıklarda, yaklaşık k_m değerine kadar sonlu momentumlu durumların doldurulması söz konusudur, şöyle ki $\hbar^2 k_m^2/2m = k_B T$. Bu durumların her biri, $k_B T$ ile orantılı bir enerjiye sahiptir. Bu nedenle d boyuttaki uyarma enerjisi $E_\times \propto V k_m^d k_B T$ ile verilir. Ortaya çıkan ısı sığası, $C_V \propto V k_B T^{d/2}$ şeklindedir. Düşünce, fonon (veya foton) gazların ısı sığasını hesaplamada kullanılana benzerdir. Kuvvet yasalarındaki farklılık, düşük enerji uyarılmalarındaki enerji spektrumundaki farklılıktan kaynaklanır (birincisinde ($\mathcal{E}(k) \propto k^2$, ikincisinde $\mathcal{E}(k) \propto k$). İki durumda da, $\mu = 0$ ile uyumlu olarak, toplam uyarılma sayısı korunmaz. Bose gazı için, bu korunum eksikliği geçiş sıcaklığına kadar varlığını devam ettirir, bu noktadan sonra tüm parçacıklar, $\mu = 0$ ile $\vec{k} = 0$ durumunda rezervuarın dışına uyarılır. T_c'de C_V, parçacık başına yaklaşık $1.92k_B$'lik maksimum değere ulaşarak sürekli durumdadır, fakat bu noktada süreksiz bir türevi vardır.