8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği
2007 Güz

VII. Yozlaşmış Fermi Gazı

Sıfır sıcaklıkta, fermi doluluk sayısı,

$$\langle n_{\vec{k}} \rangle_{-} = \frac{1}{e^{\beta\left(\mathcal{E}(k)-\mu\right)}+1}, \qquad \text{(VII.40)}$$

$\mathcal{E}(\vec{k}) < \mu$ iken bir, aksi takdirde sıfır olur. Sıfır sıcaklıkta μ'nun limit değerine *fermi enerjisi*, $\mathcal{E}_F$, adı verilir ve $\mathcal{E}_F$'den küçük tüm tek parçacık durumları, bir *fermi denizi* oluşturacak şekilde doldurulur. $\mathcal{E}(\vec{k}) = \hbar^2 k^2/(2m)$ enerjilerine sahip ideal bir gaz için, ilgili bir *fermi dalga sayısı* k_F bulunur ve şöyle hesaplanır,

$$N = \sum_{|\vec{k}| \le k_F} (2s+1) = gV \int^{k<k_F} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} = g\frac{V}{6\pi^2}k_F^3. \qquad \text{(VII.41)}$$

$n = N/V$ yoğunluğu cinsinden,

$$k_F = \left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{1/3}, \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{E}_F(n) = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{2/3}. \qquad \text{(VII.42)}$$

Klasik bir hesapta ideal gaz, $T = 0$ durumunda büyük bir durum yoğunluğuna sahipken ($\Omega_{\text{Klasik}} = V^N/N!$) , kuantum fermi gazı $\Omega = 1$ olmak üzere özgün bir duruma sahiptir. Tek parçacıklı momentumlar belirlendikten sonra (tüm $\vec{k}$'ler $|\vec{k}| < k_F$ olarak), denklem (VII.7)'de oluşturulduğu gibi sadece bir anti-simetrik durum mevcuttur.

Fermi denizinin düşük sıcaklıklarda nasıl modifiye olduğunu görmek için büyük z değeri için $f_m^-(z)$'nin davranışına ihtiyaç duyarız, bu da kısmi integralin ardından şu şekildedir,

$$f_m^-(z) = \frac{1}{m!}\int_0^\infty dx\, x^m \frac{d}{dx}\left(\frac{-1}{z^{-1}e^x+1}\right).$$

Fermi doluluk sayısı birden sıfıra aniden değiştiği için, yukarıdaki denklemde türevi sivri uçludur. $x = \ln z + t$ alarak ve integralin aralığını $-\infty < t < +\infty$ şeklinde uzatarak bu ucun çevresinde şöyle açabiliriz,

$$\begin{aligned} f_m^-(z) &\approx \frac{1}{m!}\int_{-\infty}^\infty dt\, (\ln z + t)^m \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{e^t+1}\right) \\ &= \frac{1}{m!}\int_{-\infty}^\infty dt \sum_{\alpha=0}^\infty \binom{m}{\alpha} t^\alpha (\ln z)^{m-\alpha} \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{e^t+1}\right) \\ &= \frac{(\ln z)^m}{m!}\sum_{\alpha=0}^\infty \frac{m!}{\alpha!(m-\alpha)!}(\ln z)^{-\alpha}\int_{-\infty}^\infty dt\, t^\alpha \frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{e^t+1}\right). \end{aligned} \qquad \text{(VII.43)}$$

İntegrandın $t \to -t$ altındaki (anti) simetrisini kullanarak ve kısmi integrali geri alarak şu sonuca ulaşabiliriz,

$$\frac{1}{\alpha!}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, t^{\alpha}\frac{d}{dt}\left(\frac{-1}{e^t+1}\right) = \begin{cases} 0 & \alpha \text{ tek için} \\ \dfrac{2}{(\alpha-1)!}\displaystyle\int_0^{\infty} dt\,\frac{t^{\alpha-1}}{e^t+1} = 2f_{\alpha}^{-}(1) & \alpha \text{ çift için} \end{cases}$$

Yukarıdakini (VII.43) denklemine yerleştirmek ve $f_{\alpha}^{-}(1)$ integralleri için tablolanmış değerleri kullanmak *Sommerfeld açılımı*na götürür,

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} f_m^{-}(z) &= \frac{(\ln z)^m}{m!}\sum_{\alpha=0}^{\text{even}} 2f_{\alpha}^{-}(1)\,\frac{m!}{(m-\alpha)!}\,(\ln z)^{-\alpha} \\ &= \frac{(\ln z)^m}{m!}\left[1+\frac{\pi^2}{6}\,\frac{m(m-1)}{(\ln z)^2}+\frac{7\pi^4}{360}\,\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{(\ln z)^4}+\cdots\right]. \end{aligned} \qquad \text{(VII.44)}$$

Yozlaşma limitinde, yoğunluk ve kimyasal potansiyel şöyle ilişkilendirilir,

$$\frac{n\lambda^3}{g} = f_{3/2}^{-}(z) = \frac{(\ln z)^{3/2}}{(3/2)!}\left[1+\frac{\pi^2}{6}\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,(\ln z)^{-2}+\cdots\right] \gg 1. \qquad \text{(VII.45)}$$

En düşük mertebedeki sonuç, fermi enerjisi için (VII.41) denklemindeki ifadeyi verir,

$$\lim_{T\to 0}\ln z = \left[\frac{3}{4}\sqrt{\pi}\;\frac{n\lambda^3}{g}\right]^{2/3} = \frac{\beta h^2}{2m}\left(\frac{6\pi^2 n}{g}\right)^{2/3} = \beta\mathcal{E}_F.$$

(VII.45) denklemine sıfır sıcaklık limitini yerleştirmek, aşağıdaki birinci mertebeden düzeltmeyi verir,

$$\ln z = \beta\mathcal{E}_F\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_BT}{\mathcal{E}_F}\right)^2+\cdots\right]^{-2/3} = \beta\mathcal{E}_F\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_BT}{\mathcal{E}_F}\right)^2+\cdots\right]. \qquad \text{(VII.46)}$$

Uygun boyutsuz açılım parametresi $(k_BT/\mathcal{E}_F)$'dır. Fermiyon kimyasal potansiyelinin, $\mu = k_BT\ln z$, düşük sıcaklıklarda pozitif, yüksek sıcaklıklarda negatif olduğunu hatırlayınız ((VII.38) denkleminden). Bu, $\mathcal{E}_F/k_B$ ile orantılı bir sıcaklıkta işaret değiştirir.

Basınç için düşük sıcaklıktaki açılım şöyledir,

$$\beta P = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}^{-}(z) = \frac{g}{\lambda^3} \frac{(\ln z)^{5/2}}{(5/2)!}\left[1 + \frac{\pi^2}{6}\,\frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,(\ln z)^{-2} + \cdots\right]$$
$$= \frac{g}{\lambda^3} \frac{8(\beta\mathcal{E}_F)^{5/2}}{15\sqrt{\pi}}\left[1 - \frac{5}{2}\,\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F}\right)^2 + \cdots\right]\left[1 + \frac{5\pi^2}{8}\left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F}\right)^2 + \cdots\right] \quad \text{(VII.47)}$$
$$= P_F\left[1 + \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{k_B T}{\mathcal{E}_F}\right)^2 + \cdots\right],$$

burada, $P_F = (2/5)n\mathcal{E}_F$, *fermi basıncıdır*. Klasik karşılığından farklı olarak, sıfır sıcaklıktaki fermi gazı, sonlu basınca ve içsel enerjiye sahiptir.

İçsel enerji için düşük sıcaklık açılımı, (VII.47) denkleminden,

$$\frac{E}{V} = \frac{3}{2}P = \frac{3}{5}nk_B T_F\left[1 + \frac{5}{12}\pi^2\left(\frac{T}{T_F}\right)^2 + \cdots\right], \quad \text{(VII.48)}$$

kullanılarak kolayca elde edilir. Burada *fermi sıcaklığı* $T_F = \mathcal{E}_F/k_B$ olarak tanımlanmıştır. Denlem (VII.48), düşük sıcaklıkta şöyle bir ısı sığasına yol açar,

$$C_V = \frac{dE}{dT} = \frac{\pi^2}{2}Nk_B\left(\frac{T}{T_F}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{T}{T_F}\right)^2. \quad \text{(VII.49)}$$

Isı sığasının, $T \to 0$ limitinde doğrusal sıfıra gidişi fermi gazının, tüm boyutlarda geçerli olan genel bir özelliğidir. Basit fiziksel yorumu şu şekildedir: Tek parçacık durumlarını doldurma olasılığı, denklem (VII.40), düşük sıcaklıklarda bir basamak fonksiyonuna çok benzerdir. Sadece fermi enerjisinin yaklaşık $k_B T$ mesafesinde bulunan parçacıklar termal olarak uyarılabilir. Bu, toplam elektron sayısının sadece küçük bir kısmını, T/T_F, temsil eder. Uyarılan her bir parçacık, $k_B T$ mertebesinde bir enerji elde eder, böylece içsel enerjide yaklaşık $k_B T N(T/T_F)$ kadar değişiklik meydana gelir. Bu nedenle ısı sığası $C_V = dE/dT \sim Nk_B T/T_F$ ile verilir. Bu sonuç, aynı zamanda etkileşen fermi gazı için de geçerlidir. Düşük sıcaklıklarda sadece küçük sayılarda, $N(T/T_F)$, fermiyonun uyarılıyor olması fermi gazlarının birçok ilginç özelliğinin kaynağıdır. Örneğin, N tane μ_B manyetik momentine sahip etkileşmeyen parçacığa sahip bir klasik gazın manyetik alınganlığı $\chi \propto N\mu_B^2/(k_B T)$ Curie yasasına uyar. Kuantum mekaniği açısından düşük sıcaklıklarda spinlerin sadece küçük bir kısmı katkıda bulunduğu için, düşük sıcaklık alınganlığı $\chi \propto N\mu_B^2/(k_B T_F)$'lik bir (Pauli) değerinde doymuş hale gelir. (Bu hesaplamanın detayları için gözden geçirme problemlerine bakınız).