MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

VII.B Kanonik Formülasyon

Bir önceki bölümde oluşturulmuş durumları kullanarak, etkileşmeyen özdeş parçacıklar için kanonik yoğunluk matrisini hesaplayabiliriz. Koordinat gösteriminde aşağıdaki formülü elde ederiz:

$$\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle_\eta = \sum_{\{\vec{k}\}}{}' \sum_{P,P'} \eta^P \eta^{P'} \langle\{\vec{x}'\}|P'\{\vec{k}\}\rangle \rho(\{\vec{k}\}) \langle P\{\vec{k}\}|\{\vec{x}\}\rangle \frac{1}{N_\eta}, \qquad \text{(VII.11)}$$

burada $\rho(\{\vec{k}\}) = \exp\left[-\beta\left(\sum_{\alpha=1}^{N} \hbar^2 k_\alpha^2/2m\right)\right]/Z_N$ dir. $\sum'_{\{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\ldots,\vec{k}_N\}}$ toplamı, herbir özdeş parçacık durumunun bir kez ve yalnızca bir kez ortaya çıkmasını sağlayacak şekilde sınırlandırılmıştır. Bozonik ve fermiyonik altuzayların her ikisinde de $\{n_{\vec{k}}\}$ doluluk sayıları kümesi, özgün olarak bir durumu tanımlar. Yine de, (bozonlar için) ortaya çıkan fazladan sayma çarpanı $N!/(\prod_{\vec{k}} n_{\vec{k}}!)$ ile bölersek, bu sınırlandırmayı denklem (VII.11)'den kaldırabiliriz,

$$\sum_{\{\vec{k}\}}{}' = \sum_{\{\vec{k}\}} \frac{\prod_{\vec{k}} n_{\vec{k}}!}{N!}.$$

(Fermiyonlar için $(-1)^P$ faktörleri, her hangi $n_{\vec{k}}$ değerinin birden fazla olduğu durumlardan gelen katkıları yok ettiği dikkate alınmalıdır.) Bu nedenle,

$$\begin{aligned}\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = &\sum_{\{\vec{k}\}} \frac{\prod_{\vec{k}} n_{\vec{k}}!}{N!} \cdot \frac{1}{N!\prod_{\vec{k}} n_{\vec{k}}!} \cdot \\ &\sum_{P,P'} \frac{\eta^P \eta^{P'}}{Z_N} \exp\left(-\beta \sum_{\alpha=1}^{N} \frac{\hbar^2 k_\alpha^2}{2m}\right) \langle\{\vec{x}'\}|P'\{\vec{k}\}\rangle \langle P\{\vec{k}\}|\{\vec{x}\}\rangle.\end{aligned} \qquad \text{(VII.12)}$$

Büyük hacim limitinde $\{\vec{k}\}$ üzerinden toplamlar, integrallerle değiştirilebilir, ve dalga fonksiyonlarının düzlem dalga gösterimini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz,

$$\begin{aligned}\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = &\frac{1}{Z_N (N!)^2} \sum_{P,P'} \eta^P \eta^{P'} \int \prod_{\alpha=1}^{N} \frac{V\, d^3\vec{k}_\alpha}{(2\pi)^3} \exp\left(-\frac{\beta\hbar^2 k_\alpha^2}{2m}\right) \\ &\times \left\{ \frac{\exp\left[-i\sum_{\alpha=1}^{N} (\vec{k}_{P\alpha}\cdot\vec{x}_\alpha - \vec{k}_{P'\alpha}\cdot\vec{x}'_\alpha)\right]}{V^N} \right\}.\end{aligned} \qquad \text{(VII.13)}$$

Belirli bir $\vec{k}$-vektörüne odaklanarak üsteki toplamı düzenleyebiliriz.

$\beta = P\alpha$ ve $\alpha = P^{-1}\beta$ iken $\sum_\alpha f(P\alpha) g(\alpha) = \sum_\beta f(\beta) g(P^{-1}\beta)$ olduğu için, aşağıdaki eşitliği elde ederiz,

$$\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = \frac{1}{Z_N(N!)^2}\sum_{P,P'}\eta^P\eta^{P'}\prod_{\alpha=1}^{N}\left[\int\frac{d^3\vec{k}_\alpha}{(2\pi)^3}e^{-i\vec{k}_\alpha\cdot\left(\vec{x}_{P^{-1}\alpha}-\vec{x}'_{P'^{-1}\alpha}\right)-\beta\hbar^2k_\alpha^2/2m}\right]. \tag{VII.14}$$

Köşeli parantez içindeki gaussiyen integralleri şuna eşittir:

$$\frac{1}{\lambda^3}\exp\left[-\frac{\pi}{\lambda^2}\left(\vec{x}_{P^{-1}\alpha}-\vec{x}'_{P'^{-1}\alpha}\right)^2\right].$$

Denklem (VII.14)'te $\beta = P^{-1}\alpha$ düzenlemesi şunu verir:

$$\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = \frac{1}{Z_N\lambda^{3N}(N!)^2}\sum_{P,P'}\eta^P\eta^{P'}\exp\left[-\frac{\pi}{\lambda^2}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\vec{x}_\beta-\vec{x}'_{P'^{-1}P\beta}\right)^2\right]. \tag{VII.15}$$

Son olarak, ($\sum_P = N!$'i uyguladıktan sonra) aşağıdaki formülü elde etmek için, $Q = P'^{-1}P$'i tespit ederiz, ve $\eta^P = \eta^{P^{-1}}$ ve $\eta^Q = \eta^{P'^{-1}P} = \eta^{P'}\eta^P$ sonuçlarını kullanırız:

$$\langle\{\vec{x}'\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = \frac{1}{Z_N\lambda^{3N}N!}\sum_Q\eta^Q\exp\left[-\frac{\pi}{\lambda^2}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\vec{x}_\beta-\vec{x}'_{Q\beta}\right)^2\right]. \tag{VII.16}$$

Kanonik ülleşim fonksiyonu, Z_N, normalleştirme koşulundan

$$\mathrm{tr}(\rho)=1, \quad \Longrightarrow \quad \int\prod_{\alpha=1}^{N}d^3\vec{x}_\alpha\ \langle\{\vec{x}\}|\rho|\{\vec{x}\}\rangle = 1,$$

şöyle elde edilir

$$Z_N = \frac{1}{N!\lambda^{3N}}\int\prod_{\alpha=1}^{N}d^3\vec{x}_\alpha\sum_Q\eta^Q\exp\left[-\frac{\pi}{\lambda^2}\sum_{\beta=1}^{N}\left(\vec{x}_\beta-\vec{x}_{Q\beta}\right)^2\right]. \tag{VII.17}$$

Kuantum üleşim fonksiyonu bu nedenle $N!$ sayıda olası permütasyonlarının üzerinden bir toplamı içerir. $Z_N = (V/\lambda^3)^N/N\ !$ klasik sonucu, parçacık değişiminin olmadığını gösteren $Q \equiv 1$'e karşılık gelen terimden elde edilir. $N!$'e bölünme, sonunda, özdeş parçacıkların faz uzayını ele alırken klasik istatistiksel mekanikte (bir şekilde yapay olarak) sunulan faktörü doğrular. Ancak, bu klasik sonuç sadece çok yüksek sıcaklıkta geçerlidir ve kalan permütasyonlardan gelen kuantum düzeltmeleriyle değişir. Herhangi bir permütasyon, $\exp\left[-\pi(\vec{x}_1-\vec{x}_2)^2/\lambda^2\right]$ faktörlerinin çarpımını içerdiği için, $T\to\infty$ için katkısı $\lambda\to 0$ olarak yok olur.

En düşük mertebe düzeltme, iki parçacığın değiştirilmesinden ibaret olan en basit permütasyondan gelir. Parçacıklar 1 ve 2'nin değiştirilmesine $\eta\exp\left[-2\pi(\vec{x}_1 -\right.$

$\vec{x}_2)^2/\lambda^2]$ faktörü eşlik eder. Herbir olası $N(N-1)/2$ ikili değiştirmeler Z_N'e aynı katkıyı verdiği için, şunu elde ederiz:

$$Z_N = \frac{1}{N!\lambda^{3N}} \int \prod_{\alpha=1}^{N} d^3\vec{x}_\alpha \left\{1 + \frac{N(N-1)}{2}\eta \exp\left[-\frac{2\pi}{\lambda^2}(\vec{x}_1 - \vec{x}_2)^2\right] + \cdots\right\}. \qquad \text{(VII.18)}$$

Herhangi $\alpha \geq 2$ için, $\int d^3\vec{x}_\alpha = V$; geri kalan iki integralde bağıl $\vec{r}_{12} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ ve kütle merkezi koordinatlarını, aşağıdaki eşitliği elde etmek için kullanabiliriz,

$$\begin{aligned} Z_N &= \frac{1}{N!\lambda^{3N}} V^N \left[1 + \frac{N(N-1)}{2V}\eta \int d^3\vec{r}_{12}\, e^{-2\pi\vec{r}_{12}^{\,2}/\lambda^2} + \cdots\right] \\ &= \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N \left[1 + \frac{N(N-1)}{2V} \cdot \left(\sqrt{\frac{2\pi\lambda^2}{4\pi}}\right)^3 \eta + \cdots\right]. \end{aligned} \qquad \text{(VII.19)}$$

İlgili serbest enerjiden,

$$F = -k_BT \ln Z_N = -Nk_BT \ln\left[\frac{e}{\lambda^3} \cdot \frac{V}{N}\right] - \frac{k_BTN^2}{2V} \cdot \frac{\lambda^3}{2^{3/2}}\eta + \cdots, \qquad \text{(VII.20)}$$

gaz basıncı aşağıda gösterildiği gibi hesaplanır

$$P = -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T = \frac{Nk_BT}{V} - \frac{N^2k_BT}{V^2} \cdot \frac{\lambda^3}{2^{5/2}}\eta + \cdots = nk_BT\left[1 - \frac{\eta\lambda^3}{2^{5/2}}n + \cdots\right]. \qquad \text{(VII.21)}$$

İlk kuantum düzeltmesinin, aşağıdaki gibi bir ikinci virial katsayısına eşit olduğu dikkate alınmalıdır

$$B_2 = -\frac{\eta\lambda^3}{2^{5/2}}. \qquad \text{(VII.22)}$$

Ortaya çıkan basınç düzeltmesi, bozonlar için negatif, fermiyonlar için pozitiftir. Klasik formülasyonda, bir ikinci virial katsayısı, iki parçacık etkileşmesinden elde edilir. (VII.22) denkleminde ikinci virial katsayısını doğuran $\mathcal{V}(\vec{r})$ klasik potansiyeli aşağıdaki eşitlikten elde edilir,

$$\begin{aligned} &f(\vec{r}) = e^{-\beta\mathcal{V}(\vec{r})} - 1 = \eta e^{-2\pi\vec{r}^{\,2}/\lambda^2}, \quad \Longrightarrow \\ &\mathcal{V}(\vec{r}) = -k_BT \ln\left[1 + \eta e^{-2\pi\vec{r}^{\,2}/\lambda^2}\right] \approx -k_BT\eta\, e^{-2\pi\vec{r}^{\,2}/\lambda^2}. \end{aligned} \qquad \text{(VII.23)}$$

(Son yaklaştırma, sadece birinci düzeltmenin önemli olduğu yüksek sıcaklıklara karşılık gelir.) Bu nedenle yüksek sıcaklıklarda kuantum istatistiğinin etkileri, yaklaşık olarak parçacıklar arasında bir etkileşme oluşturmaya denktir. Etkileşme, bozonlar için çekici, fermiyonlar için iticidir ve termal dalga uzunluğu λ mertebesindeki mesafelerde işler.

VII.C Büyük Kanonik Formülasyon

(VII.17) denklemindeki tüm toplamları gerçekleştirerek üleşim fonksiyonunu hesaplamak zorlu bir iştir. Buna alternatif olarak, enerji tabanındaki Z_N'yi aşağıdaki şekilde hesaplayabiliriz,

$$Z_N = \mathrm{tr}\left(e^{-\beta\mathcal{H}}\right) = \sum_{\{\vec{k}_\alpha\}}{}^{'} \exp\left[-\beta\sum_{\alpha=1}^{N}\mathcal{E}(\vec{k}_\alpha)\right] = \sum_{\{n_{\vec{k}}\}}{}^{'} \exp\left[-\beta\sum_{\vec{k}}\mathcal{E}(\vec{k})n(\vec{k})\right]. \quad \text{(VII.24)}$$

İzin verilen $\vec{k}$ veya $\{n_{\vec{k}}\}$ değerlerindeki simetri kısıtlamalarına bağlı olarak bu toplamların gerçekleştirilmesi hala çok kolay değildir: $\{n_{\vec{k}}\}$ doluluk sayıları, bozonlar için $\sum_{\vec{k}} n_{\vec{k}} = N$ ve $n_{\vec{k}} = 0,1,2,\dots$ ile sınırlıyken, fermiyonlar için $n_{\vec{k}} = 0$ veya 1'dir. Her zamanki gibi, birinci kısıt, büyük üleşim fonksiyonuna bakarak kaldırılabilir,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_\eta(T,\mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N}\sum_{\{n_{\vec{k}}\}}{}^{'}\exp\left[-\beta\sum_{\vec{k}}\mathcal{E}(\vec{k})n_{\vec{k}}\right]\\ &= \sum_{\{n_{\vec{k}}\}}^{\eta}\prod_{\vec{k}}\exp\left[-\beta\big(\mathcal{E}(\vec{k})-\mu\big)n_{\vec{k}}\right].\end{aligned} \quad \text{(VII.25)}$$

Artık parçacık simetrisinin empoze ettiği doluluk sayıları kısıtlamasına tabi olan her bir $\vec{k}$ için $\{n_{\vec{k}}\}$ üzerinden toplamlar bağımsız olarak gerçekleştirilebilir.

- *Fermiyonlar* için, $n_{\vec{k}} = 0$ veya 1'dir ve,

$$\mathcal{Q}_- = \prod_{\vec{k}}\left[1+\exp\left(\beta\mu-\beta\mathcal{E}(\vec{k})\right)\right]. \quad \text{(VII.26)}$$

- *Bozonlar* için $n_{\vec{k}} = 0,1,2,\dots$, ve geometrik dizilerin toplamı aşağıdaki sonucu verir,

$$\mathcal{Q}_+ = \prod_{\vec{k}}\left[1-\exp\left(\beta\mu-\beta\mathcal{E}(\vec{k})\right)\right]^{-1}. \quad \text{(VII.27)}$$

Her iki durum için sonuçlar, fermiyonlar için $\eta = -1$; bozonlar için $\eta = +1$ olmak üzere eş zamanlı olarak aşağıdaki şekilde gösterilebilir,

$$\ln\mathcal{Q}_\eta = -\eta\sum_{\vec{k}}\ln\left[1-\eta\exp\left(\beta\mu-\beta\mathcal{E}(\vec{k})\right)\right], \quad \text{(VII.28)}$$

Büyük kanonik formülasyonda, farklı tek parçacık durumları şu birleşik olasılıkla bağımsız biçimde işgal edilir,

$$p_\eta\left(\left\{n(\vec{k})\right\}\right)=\frac{1}{\mathcal{Q}_\eta}\prod_{\vec{k}}\exp\left[-\beta\left(\mathcal{E}(\vec{k})-\mu\right)n_{\vec{k}}\right]. \qquad \text{(VII.29)}$$

$\mathcal{E}(\vec{k})$ enerjili bir durumunun *ortalama doluluk sayısı* aşağıdaki eşitlikle verilir,

$$\langle n_{\vec{k}}\rangle_\eta=-\frac{\partial\ln\mathcal{Q}_\eta}{\partial\left(\beta\mathcal{E}(\vec{k})\right)}=\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\mathcal{E}(\vec{k})}-\eta}, \qquad \text{(VII.30)}$$

burada, $z=\exp(\beta\mu)$. Bunun sonrasında, parçacık sayısı ve içsel enerjinin ortalama değerleri şu şekildedir,

$$\begin{cases} N_\eta=\sum_{\vec{k}}\langle n_{\vec{k}}\rangle_\eta=\sum_{\vec{k}}\frac{1}{z^{-1}e^{\beta\mathcal{E}(\vec{k})}-\eta} \\ E_\eta=\sum_{\vec{k}}\mathcal{E}(\vec{k})\langle n_{\vec{k}}\rangle_\eta=\sum_{\vec{k}}\frac{\mathcal{E}(\vec{k})}{z^{-1}e^{\beta\mathcal{E}(\vec{k})}-\eta} \end{cases}. \qquad \text{(VII.31)}$$

VII.D Bağıl Olmayan Gaz

Kuantum parçacıkları daha ileri düzeyde bir s *spini* ile karakterize edilir. Manyetik alan olmadığında, farklı spin durumları aynı enerjiye sahiptir ve bir *spin yozlaşma* faktörü, $g=2s+1$, (VII.28)-(VII.31) denklemlerini çarpar. Özellikle, üç boyutlu, göreceli olmayan bir gaz için, ($\mathcal{E}(\vec{k})=\hbar^2k^2/2m$, ve $\sum_{\vec{k}}\to V\int d^3\vec{k}/(2\pi)^3$), bu denklemler şunlara indirgenir,

$$\begin{cases} \beta P_\eta=\frac{\ln\mathcal{Q}_\eta}{V}=\eta g\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\ln\left[1-\eta z\exp\left(-\frac{\beta\hbar^2k^2}{2m}\right)\right], \\ n_\eta\equiv\frac{N_\eta}{V}=g\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{1}{z^{-1}\exp\left(\frac{\beta\hbar^2k^2}{2m}\right)-\eta}, \\ \varepsilon_\eta\equiv\frac{E_\eta}{V}=g\int\frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3}\frac{\hbar^2k^2}{2m}\frac{1}{z^{-1}\exp\left(\frac{\beta\hbar^2k^2}{2m}\right)-\eta}. \end{cases} \qquad \text{(VII.32)}$$

Bu denklemleri sadeleştirmek için, değişkenleri $x=\beta\hbar^2k^2/(2m)$ olarak değiştiririz ve böylece,

$$k=\frac{\sqrt{2mk_BT}}{\hbar}x^{1/2}=\frac{2\pi^{1/2}}{\lambda}x^{1/2}, \qquad \Longrightarrow \qquad dk=\frac{\pi^{1/2}}{\lambda}x^{-1/2}dx.$$

(VII.32) denklemlerinde yerine koymak şu sonucu verir,

$$\begin{cases} \beta P_\eta = -\,\eta\,\frac{g}{2\pi^2}\,\frac{4\pi^{3/2}}{\lambda^3}\int_0^\infty dx\,x^{1/2}\ln\left(1-\eta z e^{-x}\right) \\ \qquad = \frac{g}{\lambda^3}\,\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx\,x^{3/2}}{z^{-1}e^x-\eta}, \quad \text{(integration by parts)} \\ n_\eta = \frac{g}{\lambda^3}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx\,x^{1/2}}{z^{-1}e^x-\eta}, \\ \beta\varepsilon_\eta = \frac{g}{\lambda^3}\,\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dx\,x^{3/2}}{z^{-1}e^x-\eta}\,. \end{cases} \tag{VII.33}$$

Bu durumda, iki fonksiyon kümesini şöyle tanımlarız,

$$f_m^\eta(z) = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{dx\,x^{m-1}}{z^{-1}e^x-\eta}. \tag{VII.34}$$

Tamsayı olmayan argümanlar için, $m! \equiv \Gamma(m+1)$ fonksiyonu, $\int_0^\infty d\,x x^m e^{-x}$ integrali ile tanımlanır. Bu tanımdan özellikle, çıkan sonuç, (1/2)! $=\sqrt{\pi}/2$, ve $(3/2)! = (3/2)\sqrt{\pi}/2$ değerleridir. Şimdi (VII.33) denklemleri aşağıdaki basit şekli alır,

$$\begin{cases} \beta P_\eta = \frac{g}{\lambda^3} f_{5/2}^\eta(z), \\ n_\eta = \frac{g}{\lambda^3} f_{3/2}^\eta(z), \\ \varepsilon_\eta = \frac{3}{2} P_\eta \quad . \end{cases} \tag{VII.35}$$

Bu sonuçlar, ideal kuantum gazlarının termodinamiğini z'nin fonksiyonu olarak tanımlar. $P_\eta(n_\eta, T)$ durum denklemini bulmak için, z'yi yoğunluk cinsinden çözmemiz gerekir. Bu, $f_m^\eta(z)$ fonksiyonlarının davranışına ilişkin bilgi sahibi olmayı gerektirir.

İlk olarak yüksek sıcaklık düşük yoğunluk (yoz olmayan) limiti incelenecektir. Bu limitte z küçüktür ve,

$$\begin{aligned} f_m^\eta(z) &= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty \frac{dx\,x^{m-1}}{z^{-1}e^x-\eta} = \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty dx\,x^{m-1}\left(ze^{-x}\right)\left(1-\eta z e^{-x}\right)^{-1} \\ &= \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty dx\,x^{m-1}\sum_{\alpha=1}^\infty \left(ze^{-x}\right)^\alpha \ \eta^{\alpha+1} \\ &= \sum_{\alpha=1}^\infty \eta^{\alpha+1} z^\alpha \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\infty dx\,x^{m-1}e^{-\alpha x} \\ &= \sum_{\alpha=1}^\infty \eta^{\alpha+1}\frac{z^\alpha}{\alpha^m} = z + \eta\frac{z^2}{2^m} + \frac{z^3}{3^m} + \eta\frac{z^4}{4^m} + \cdots . \end{aligned} \tag{VII.36}$$

Böylece, $f_m^\eta(z)$ ve dolayısıyla $n_\eta(z)$ ve $P_\eta(z)$ değerlerinin, gerçekten de $z \to 0$ iken, küçük olduğunu buluruz (öz tutarlı olarak). Bu limitte denklem (VII.35) aşağıdaki eşitlikleri verir,

$$\begin{cases} \dfrac{n_\eta \lambda^3}{g} = f_{3/2}^\eta(z) = z + \eta \dfrac{z^2}{2^{3/2}} + \dfrac{z^3}{3^{3/2}} + \eta \dfrac{z^4}{4^{3/2}} + \cdots, \\ \dfrac{\beta P_\eta \lambda^3}{g} = f_{5/2}^\eta(z) = z + \eta \dfrac{z^2}{2^{5/2}} + \dfrac{z^3}{3^{5/2}} + \eta \dfrac{z^4}{4^{5/2}} + \cdots. \end{cases} \tag{VII.37}$$

Yukarıdaki denklemlerin ilki, çözümü daha düşük bir mertebede yerine koyarak gerçekleşen tekrarlamalı bir yöntemle pertürbatif olarak çözülebilir,

$$\begin{aligned} z &= \frac{n_\eta \lambda^3}{g} - \eta \frac{z^2}{2^{3/2}} - \frac{z^3}{3^{3/2}} - \cdots \\ &= \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right) - \frac{\eta}{2^{3/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^2 - \cdots \\ &= \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right) - \frac{\eta}{2^{3/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}}\right) \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^3 - \cdots. \end{aligned} \tag{VII.38}$$

Bu çözümün ikincide yerine konulması şu eşitliği verir,

$$\begin{aligned} \frac{\beta P_\eta \lambda^3}{g} = &\left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right) - \frac{\eta}{2^{3/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^2 + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3^{3/2}}\right) \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^3 \\ &+ \frac{\eta}{2^{5/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^3 + \frac{1}{3^{5/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^3 + \cdots. \end{aligned}$$

Böylece kuantum gazının basıncı virial açılımından elde edilebilir,

$$P_\eta = n_\eta k_B T \left[1 - \frac{\eta}{2^{5/2}} \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{2}{3^{5/2}}\right) \left(\frac{n_\eta \lambda^3}{g}\right)^2 + \cdots \right]. \tag{VII.39}$$

İkinci virial katsayısı $B_2 = -\eta\lambda^3/(2^{5/2}g)$, $g = 1$ için kanonik toplulukta hesaplanmış olan (VII.22) denklemi ile uyum içindedir. Doğal (boyutsuz) açılım parametresi, $n_\eta\lambda^3/g$ şeklindedir ve $n_\eta\lambda^3 \geq g$ olduğunda, yani *kuantum yozlaşma* limitinde, kuantum mekaniksel etkiler önemli hale gelir. Bu düşük sıcaklık ve yüksek yoğunlukta yozlaşma limitinde fermi ve bose gazlarının davranışları farklıdır, ve bu iki durum gelecek kısımlarda ayrı ayrı tartışılacaktır.