8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

III.H Sıfırıncı Derece Hidrodinamik

İlk yaklaşım olarak, *yerel denge*de, f_1 yoğunluğunun, uzayın her noktasında denklem (III.56)'daki gibi temsil edilebileceğini varsayacağız, yani,

$$f_1^0(\vec{p},\vec{q},t) = \frac{n(\vec{q},t)}{(2\pi m k_B T(\vec{q},t))^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{p}-m\vec{u}(\vec{q},t))^2}{2mk_B T(\vec{q},t)}\right]. \qquad \text{(III.93)}$$

Parametrelerin seçimi, gerektiği gibi $\int d^3\vec{p} f_1^0 = n$, $\langle \vec{p}/m\rangle^0 = \vec{u}$ olmasını açıkça zorlar. Ortalama değerler, bu Gauss tipi ağırlıktan kolayca hesaplanır, özellikle,

$$\langle c_\alpha c_\beta\rangle^0 = \frac{k_B T}{m}\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{(III.94)}$$

ve sonuç olarak,

$$P^0_{\alpha\beta} = nk_B T\delta_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{ve} \qquad \varepsilon = \frac{3}{2}k_B T. \qquad \text{(III.95)}$$

f_1^0 yoğunluğu $\vec{c}$,'ye göre çift fonksiyon olduğundan, derecesi tek tüm beklenen değerler sıfırdır, ve özellikle,

$$\vec{h}^0 = 0. \qquad \text{(III.96)}$$

Bu yaklaşımda, korunum yasaları şu basit formları alırlar

$$\begin{cases} D_t n = -n\partial_\alpha u_\alpha \\ mD_t u_\alpha = F_\alpha - \frac{1}{n}\partial_\alpha(nk_B T) \\ D_t T = -\frac{2}{3}T\partial_\alpha u_\alpha \end{cases} . \qquad \text{(III.97)}$$

Yukarıdaki ifadede, *maddi türev*i kullandık:

$$D_t \equiv [\partial_t + u_\beta\partial_\beta]\,, \qquad \text{(III.98)}$$

bu türev, herhangi bir niceliğin, ortalama hız alanı $\vec{u}$ tarafından belirlenen akım çizgileri boyunca haraket ederken, zamana göre değişimlerini ölçer. Birinci ve üçüncü denklenleri birleştirerek, şu sonucu bulmak kolaydır:

$$D_t \ln\left(nT^{-3/2}\right) = 0. \qquad \text{(III.99)}$$

$\ln(nT^{-3/2})$ ifadesi, gazın yerel entropisi gibidir (bkz. denklem (III.67)), ve yukarıdaki denklem uyarınca akım çizgileri boyunca değişmez. Dolayısıyla, sıfırıncı derece hidrodinamik, gaz akışının adyabatik olduğunu öngörür. Bu, denklem (III.93)'ün yerel denge çözümünü, entropide bir artışı gereksinen, bir gerçek bütüncül dengeye ulaşmaktan alıkoyar.

(III.97)'deki denklemlerin, dengeye yeterli bir yaklaşım tasvir etmediğini göstermek için, düzgün bir kutuda, durağan ($\vec{u}_0=0$) bir durum etrafında küçük bozulmaların evrimini inceleyelim. Bunun için şu tanımları yapalım:

$$\begin{cases} n(\vec{q},t) = \overline{n} + \nu(\vec{q},t) \\ T(\vec{q},t) = \overline{T} + \theta(\vec{q},t) \end{cases} . \tag{III.100}$$

Sonra, (III.97)'deki denklemleri, $(\nu,\theta,\vec{u})$ sapmalarına göre *birinci dereceye* kadar açalım. Dikkat edilirse, en düşük derecede, $D_t=\partial_t+O(u)$, doğrusallaştırılmış sıfırıncı derece hidrodinamik denklemlerine yol açar:

$$\begin{cases} \partial_t \nu = -\overline{n}\partial_\alpha u_\alpha \\ m\partial_t u_\alpha = -\dfrac{k_B\overline{T}}{\overline{n}}\partial_\alpha \nu - k_B\partial_\alpha\theta \\ \partial_t\theta = -\dfrac{2}{3}\overline{T}\partial_\alpha u_\alpha \end{cases} . \tag{III.101}$$

• Sistemin *normal kipleri* Fourier dönüşümleriyle elde edilir,

$$A\left(\vec{k},\omega\right) = \int d^3\vec{q}\,dt\, \exp\left[i\left(\vec{k}\cdot\vec{q}-\omega t\right)\right] A\left(\vec{q},t\right), \tag{III.102}$$

burada A, üç alan $(\nu,\theta,\vec{u})$'dan herhangi birini temsil eder. Doğal titreşim frekansları, şu matris denkleminin çözümleridir,

$$\omega\begin{pmatrix}\nu\\ u_\alpha\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{n}k_\beta & 0 \\ \frac{k_B\overline{T}}{m\overline{n}}\delta_{\alpha\beta}k_\beta & 0 & \frac{k_B}{m}\delta_{\alpha\beta}k_\beta \\ 0 & \frac{2}{3}\overline{T}k_\beta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ u_\beta\\ \theta\end{pmatrix} . \tag{III.103}$$

Bu denklemin, ilk *üçü* sıfır frekanslı, şu kiplerinin olduğu kolayca doğrulanabilir:

(a) İki kip, tekdüze ($n=\overline{n}$) ve eşısıl ($T=\overline{T}$) bir sıvıda, hızın kendi yönüne dik doğrultuda değişim gösterdiği (örneğin, $\vec{u} = f(x,t)\ \hat{y}$), kayma akımlarını tanımlar. Fourier kipleri cinsinden $\vec{k}\cdot\vec{u}_T(\vec{k})=0$ olması, bu sıfırıncı derece yaklaşımda gevşemeyen *enine* akımları gösterir.

(b) Üçüncü bir sıfır frekanslı kip, *tekdüze* $P = nk_BT$ *basınç*lı durağan bir sıvı tanımlar. n ve T uzayda değişim gösterebilir, ama çarpımlarının sabit olması, sıvının basınç değişimlerinden kaynaklı hareket etmeyeceğini garanti eder. Bu kipe ait, denklem (III.103)'ün özvektörü şudur,

$$\mathbf{v_e} = \begin{pmatrix} \overline{n} \\ 0 \\ -\overline{T} \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.104)}$$

(c) Son olarak, *boyuna* hız bileşeni ($\vec{u}_\ell \parallel \vec{k}$), özkiplerin yoğunluk ve sıcaklık değişimleriyle şu biçimde birleşir,

$$\mathbf{v_l} = \begin{pmatrix} \overline{n}|\vec{k}| \\ \omega(\vec{k}) \\ \frac{2}{3}\overline{T}|\vec{k}| \end{pmatrix}, \qquad \omega(\vec{k}) = \pm v_\ell |\vec{k}|, \qquad \text{(III.105)}$$

burada

$$v_\ell = \sqrt{\frac{5}{3}\frac{k_B \overline{T}}{m}}, \qquad \text{(III.106)}$$

boyuna ses hızıdır. Dikkat edilirse, bu kipteki yoğunluk ve sıcaklık değişimleri *adyabatiktir*, yani yerel entropi ($\ln\left(nT^{-3/2}\right)$ ile orantılı) değişmeden kalır. Dolayısıyla, korunumlu niceliklerin hiçbirinin, sıfırıncı derece yaklaşımda gevşemediğini görürüz. Yanal akım ve entropi kipleri ilelebet kalıcıdır, iki ses kipi ise sönümlenmeyen salınımlara sahiptir. Bu, sıfırıncı derece yaklaşımın bir yetersizliği olup, Boltzmann denklemine daha iyi bir çözüm bulunarak giderilir.

III.I Birinci Derece Hidrodinamik

Denklem (III.93)'teki $f_1^0 \;(\vec{p}, \vec{q}, t)$, Boltzmann denkleminin sağ tarafını sıfır yapmasına rağmen, sol taraf, biçiminin değişmesine sebep olduğundan, tam bir çözüm değildir. Sol taraf *doğrusal* bir diferensiyel operatördür, ve önceki kısımlarda tanıtılan çeşitli gösterimler kullanılarak, şöyle yazılabilir:

$$\mathcal{L}[f] \equiv \left[\partial_t + \frac{p_\alpha}{m}\partial_\alpha + F_\alpha \frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right] f = \left[D_t + c_\alpha \partial_\alpha + \frac{F_\alpha}{m}\frac{\partial}{\partial c_\alpha}\right] f. \qquad \text{(III.107)}$$

$\mathcal{L}$'nin, aşağıdaki şekilde yazılabilen $\ln f_1^0$ üzerindeki etkisini incelemek daha kolaydır,

$$\ln f_1^0 = \ln\left(nT^{-3/2}\right) - \frac{mc^2}{2k_B T} - \frac{3}{2}\ln\left(2\pi m k_B\right). \qquad \text{(III.108)}$$

$\partial(c^2/2) = c_\beta \partial c_\beta = -c_\beta \partial u_\beta$ bağıntısını kullanarak,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\ln f_1^0\right] =& D_t \ln\left(nT^{-3/2}\right) + \frac{mc^2}{2k_BT^2}D_tT + \frac{m}{k_BT}c_\alpha D_t u_\alpha \\ &+c_\alpha\left(\frac{\partial_\alpha n}{n} - \frac{3}{2}\frac{\partial_\alpha T}{T}\right) + \frac{mc^2}{2k_BT^2}c_\alpha\partial_\alpha T + \frac{m}{k_BT}c_\alpha c_\beta \partial_\alpha u_\beta - \frac{F_\alpha c_\alpha}{k_BT}.\end{aligned} \tag{III.109}$$

Eğer n, T, ve u_α alanları, sıfırıncı derece hidrodinamik denklemlerini (III.97) sağlarsa, yukarıdaki denklemi şöyle basitleştirebiliriz:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\ln f_1^0\right] =& 0 - \frac{mc^2}{3k_BT}\partial_\alpha u_\alpha + c_\alpha\left[\left(\frac{F_\alpha}{k_BT} - \frac{\partial_\alpha n}{n} - \frac{\partial_\alpha T}{T}\right) + \left(\frac{\partial_\alpha n}{n} - \frac{3}{2}\frac{\partial_\alpha T}{T}\right) - \frac{F_\alpha}{k_BT}\right] \\ &+\frac{mc^2}{2k_BT^2}c_\alpha\partial_\alpha T + \frac{m}{k_BT}c_\alpha c_\beta u_{\alpha\beta} \\ =& \frac{m}{k_BT}\left(c_\alpha c_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}c^2\right)u_{\alpha\beta} + \left(\frac{mc^2}{2k_BT} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_\alpha}{T}\partial_\alpha T.\end{aligned} \tag{III.110}$$

$\mathcal{L}$'nin karakteristik zaman ölçeği τ_U dışsaldır, ve $\tau_\times$'dan çok daha büyük olması sağlanabilir. Dolayısıyla, sıfırıncı derece sonuç, $(\tau_\times / \tau_U) \to 0$ limitinde doğrudur, ve düzeltmeler, $(\tau_\times / \tau_U)$ cinsinden bir tedirgeme serisiyle yapılabilir. Bu amaçla, $f_1 = f_1^0(1+g)$ seçip, çarpışma operatörünü şu biçimde doğrusallaştırırız,

$$\begin{aligned}C\left[f_1, f_1\right] =& -\int d^3\vec{p}_2 d^2\vec{b}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2| f_1^0(\vec{p}_1) f_1^0(\vec{p}_2)\left[g(\vec{p}_1) + g(\vec{p}_2) - g(\vec{p}_1{}') - g(\vec{p}_2{}')\right] \\ \equiv& -f_1^0(\vec{p}_1)C_L[g].\end{aligned} \tag{III.111}$$

Doğrusal olmasına rağmen, yukarıdaki integral operatörü, çalışmak için hala zordur. Bir ilk yaklaşım olarak, ve karakteristik büyüklüğünü dikkate alarak, şöyle yazarız,

$$C_L[g] \approx \frac{g}{\tau_\times}. \tag{III.112}$$

Bu, *tek çarpışma zamanı* yaklaşımı olarak bilinir, ve doğrusallaştırılmış Boltzmann denklemi $\mathcal{L}[f_1] = -f_1^0 C_L[g]$ 'den şunu elde ederiz:

$$g = -\tau_\times \frac{1}{f_1^0}\mathcal{L}\left[f_1\right] \approx -\tau_\times \mathcal{L}\left[\ln f_1^0\right], \tag{III.113}$$

burada, sadece ana terim alınmıştır. Dolayısıyla, birinci derece çözüm şöyle verilir (denklem (III.110) kullanılarak),

$$f_1^1(\vec{p},\vec{q},t) - f_1^0(\vec{p},\vec{q},t)\left[1 - \frac{\tau_\mu m}{k_BT}\left(c_\alpha c_\beta - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3}c^2\right)u_{\alpha\beta} - \tau_K\left(\frac{mc^2}{2k_BT} - \frac{5}{2}\right)\frac{c_\alpha}{T}\partial_\alpha T\right], \tag{III.114}$$

burada, tek çarpışma zamanı yaklaşımında $\tau_\mu = \tau_K = \tau_\times$ 'dir. Ancak, yukarıdaki denklemi yazarken, daha gelişmiş yöntemlerde açığa çıkan $\tau_\mu \neq \tau_K$ 'nin olanaklı olduğunu öngörmüştük (her iki zaman terimi hala $\tau_\times$ mertebesinde olmasına rağmen).

$\int d^3\vec{p} f_1^1 = \int d^3\vec{p} f_1^0 = n$, olduğu kolayca gösterilebilir, dolayısıyla, çeşitli yerel beklenen değerler, birinci dereceye kadar şöyle hesaplanır,

$$\langle \mathcal{O} \rangle^1 = \frac{1}{n} \int d^3\vec{p}\, \mathcal{O} f_1^0 (1+g) = \langle \mathcal{O} \rangle^0 + \langle g\mathcal{O} \rangle^0 . \qquad \text{(III.115)}$$

Gaussiyen ağırlık f_1^0'a göre dağılmış c_α'ların çarpımları üzerinden ortalamaların hesaplanması, *Wick teoremi*nin kullanımıyla büyük ölçüde basitleşir. Teorem, çarpımların beklenen değerinin, eşleşmiş beklenen değerlerin tüm olası çarpımlarının toplamı olduğunu söyler, örneğin

$$\langle c_\alpha c_\beta c_\gamma c_\delta \rangle_0 = \left(\frac{k_B T}{m} \right)^2 \left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta}\delta_{\beta\gamma} \right) . \qquad \text{(III.116)}$$

(Simetriden dolayı, tek sayıda c_α'nın çarpımını gerektiren beklenen değerler sıfırdır.) Bu sonucu kullanarak, şunu doğrulamak kolaydır,

$$\left\langle \frac{p_\alpha}{m} \right\rangle^1 = u_\alpha - \tau_K \frac{\partial_\beta T}{T} \left\langle \left(\frac{mc^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) c_\alpha c_\beta \right\rangle^0 = u_\alpha . \qquad \text{(III.117)}$$

Birinci derecede, basınç tensörü şöyle verilir:

$$\begin{aligned} P^1_{\alpha\beta} =& nm \langle c_\alpha c_\beta \rangle^1 = nm \left[\langle c_\alpha c_\beta \rangle^0 - \frac{\tau_\mu m}{k_B T} \left\langle c_\alpha c_\beta \left(c_\mu c_\nu - \frac{\delta_{\mu\nu}}{3} c^2 \right) \right\rangle^0 u_{\mu\nu} \right] \\ =& n k_B T \delta_{\alpha\beta} - 2 n k_B T \tau_\mu \left(u_{\alpha\beta} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{3} u_{\gamma\gamma} \right) . \end{aligned} \qquad \text{(III.118)}$$

(Yukarıdaki sonucu kullanarak, eskisi gibi, $\varepsilon^1 = \left\langle mc^2/2 \right\rangle^1 = 3k_B T/2$ olduğunu da doğrulayabiliriz.) Sonuçta, ısı akısı şöyle bulunur:

$$\begin{aligned} h^1_\alpha =& n \left\langle c_\alpha \frac{mc^2}{2} \right\rangle^1 = - \frac{nm\tau_K}{2} \frac{\partial_\beta T}{T} \left\langle \left(\frac{mc^2}{2k_B T} - \frac{5}{2} \right) c_\alpha c_\beta c^2 \right\rangle^0 \\ =& - \frac{5}{2} \frac{n k_B^2 T \tau_K}{m} \partial_\alpha T . \end{aligned} \qquad \text{(III.119)}$$

Bu derecede, sıcaklıktaki uzaysal değişimlerin, kendilerini düzeltme eğiliminde bir ısı akışı yarattığını, yanal akışların ise, basınç tensöründeki köşegen-dışı terimlerce baskılandığını görürüz. Bu etkiler, önceden tartışılan kiplerin, değişen davranışlarını inceleyerek görülebileceği gibi, dengeye doğru gevşemeye yolaçmak için yeterlidir.

(a) Basınç tensörünün artık bir köşegen dışı terimi var,

$$P^1_{\alpha\neq\beta} = -2nk_BT\tau_\mu u_{\alpha\beta} \equiv -\mu\left(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha\right), \qquad \text{(III.120)}$$

burada $\mu \equiv nk_BT\tau_\mu$ *viskozite katsayısı*dır. Sıvının kırpılması (örneğin bir $u_y(x,t)$ hızıyla tanımlanan), ona direnen bir viskoz kuvvete ($\mu\partial_x^2 u_y$ ile orantılı) yol açar, ve aşağıda tartışıldığı gibi difüzif gevşemesine sebep olur.

(b) Benzer şekilde, bir sıcaklık gradyenti bir ısı akısına yol açar,

$$\vec{h} = -K\nabla T, \qquad \text{(III.121)}$$

burada, $K = (5nk_B^2T\tau_K)/(2m)$, gazın *ısıl iletkenlik* katsayısıdır. Eğer gaz durgunsa ($\vec{u} = 0$, ve tekdüze basınç, $P = nk_BT$) sıcaklıktaki değişimler şunları sağlar,

$$n\partial_t\varepsilon = \frac{3}{2}nk_B\partial_tT = -\partial_\alpha\left(-K\partial_\alpha T\right), \quad \Rightarrow \quad \partial_tT = \frac{2K}{3nk_B}\nabla^2T. \qquad \text{(III.122)}$$

Bu *Fourier denklemi*dir ve sıcaklık değişimlerinin difüzyonla gevşediğini gösterir. Tüm kiplerin davranışını, hareket denklemlerini doğrusallaştırarak tartışabiliriz.

$D_tu_\alpha \approx \partial_tu_\alpha$ 'e birinci derece katkı şöyledir

$$\delta^1\left(\partial_tu_\alpha\right) \equiv \frac{1}{mn}\partial_\beta\delta^1P_{\alpha\beta} \approx -\frac{\mu}{m\bar{n}}\left(\frac{1}{3}\partial_\alpha\partial_\beta + \delta_{\alpha\beta}\partial_\gamma\partial_\gamma\right)u_\beta, \qquad \text{(III.123)}$$

burada $\mu \equiv \bar{n}k_B\bar{T}\tau_\mu$. Benzer şekilde, $D_tT \approx \partial_t\theta$ için düzeltme şöyle verilir,

$$\delta^1\left(\partial_t\theta\right) \equiv -\frac{2}{3k_Bn}\partial_\alpha h_\alpha \approx -\frac{2K}{3k_B\bar{n}}\partial_\alpha\partial_\alpha\theta, \qquad \text{(III.124)}$$

$K = (5\bar{n}k_B^2\bar{T}\tau_K)/(2m)$ olmak üzere. Fourier dönüşümünden sonra, matris denklemi (III.103) şöyle değişir,

$$\omega\begin{pmatrix}\nu\\ u_\alpha\\ \theta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{n}\delta_{\alpha\beta}k_\beta & 0\\ \frac{k_B\bar{T}}{m\bar{n}}\delta_{\alpha\beta}k_\beta & -i\frac{\mu}{m\bar{n}}\left(k^2\delta_{\alpha\beta} + \frac{k_\alpha k_\beta}{3}\right) & \frac{k_B}{m}\delta_{\alpha\beta}k_\beta\\ 0 & \frac{2}{3}\bar{T}\delta_{\alpha\beta}k_\beta & -i\frac{2Kk^2}{3k_B\bar{n}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\nu\\ u_\beta\\ \theta\end{pmatrix}. \qquad \text{(III.125)}$$

Sıfırıncı derece yaklaşımla hesaplanmış normal kip frekanslarının, bu derecede nasıl değiştiğini sorabiliriz. Enine (kırpılma) normal kiplerin ($\vec{k}\cdot\vec{u}_T=0$) şu frekansa sahip olduklarını doğrulamak kolaydır,

$$\omega_T = -i\frac{\mu}{m\bar{n}}k^2. \qquad \text{(III.126)}$$

Frekansın sanal oluşu, bu kiplerin, karakteristik bir zaman, $\tau_T(k) \sim 1/|\omega_T| \sim (\lambda)^2/(\tau_\mu \bar{v}^2)$, içinde sönümlenmesini gerektirir, burada, λ dalgaboyu, ve $\bar{v} \sim \sqrt{k_B T/m}$ bir tipik gaz parçacığı hızıdır. Karakteristik zaman ölçeklerinin dalga boyunun karesiyle büyüdüğünü görüyoruz, bu difüzif süreçlerin özelliğidir.

Geri kalan normal kiplerde, hız şuna paraleldir,

$$\omega \begin{pmatrix} \nu \\ u_\ell \\ \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{n}k & 0 \\ \frac{k_B \overline{T}}{m\overline{n}}k & -i\frac{4\mu k^2}{3m\overline{n}} & \frac{k_B}{m}k \\ 0 & \frac{2}{3}\overline{T}k & -i\frac{2Kk^2}{3k_B\overline{n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ u_\beta \\ \theta \end{pmatrix}. \qquad \text{(III.127)}$$

Dinamik matrisin determinantı, üç özfrekansın çarpımıdır, ve en düşük derecede, şöyle yazılır:

$$\det(M) = i\frac{2Kk^2}{3k_B\overline{n}} \cdot \overline{n}k \cdot \frac{k_B\overline{T}k}{m\overline{n}} + \mathcal{O}(\tau_\times^2). \qquad \text{(III.128)}$$

Sıfırıncı derecede, iki ses kipinde $\omega_\pm^0(k) = \pm v_\ell k$ ve böylece, eşbasınç kipinin frekansı şöyledir:

$$\omega_e^1(k) \approx \frac{\det(M)}{-v_\ell^2 k^2} = -i\frac{2Kk^2}{5k_B\overline{n}} + \mathcal{O}(\tau_\times^2). \qquad \text{(III.129)}$$

Birinci derecede, boyuna ses kipleri de $\omega_\pm^1(k) = \pm v_\ell k - i\gamma$ frekansı ile sönümlü salınımlara dönüşür. Sönümlenme hızlarını elde etmenin en kolay yolu, dinamik matrisin izinin, özdeğerlerin toplamına eşit olduğunu hatırlamaktır, dolayısıyla,

$$\omega_\pm^1(k) = \pm v_\ell k - ik^2\left(\frac{2\mu}{3m\overline{n}} + \frac{2K}{15k_B\overline{n}}\right) + \mathcal{O}(\tau_\times^2). \qquad \text{(III.130)}$$

Tüm normal kiplerin sönümlenmesi, yavaş olsa da, gazın son, tekdüze ve durağan denge durumuna yaklaşmasını garanti eder.