MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

III.G Korunum Yasaları

• *Dengeye yaklaşma*: Şimdi girişte sorulan üçüncü soruyu, gazın son dengesine *nasıl* ulaştığını, ele alacağız. Gazın, denklem (III.56) ile tanımlanan denge biçiminden tedirgendiği bir durumu ele alalım, ve dengeye gevşemesini takip edelim. Burada, değişik zaman ölçeklerinde işleyen mekenizmaların bir hiyerarşisi vardır.

(i) En hızlı işleyiş, parçacıkların çok yakın çevresinde gelişen iki parçacık çarpışmalarıdır. τ_c mertebesindeki bir zaman ölçeği boyunca, $|\vec{q}_1 - \vec{q}_2| \gg d$ ayrımlarında, $f_2(\vec{q}_1,\ \vec{q}_2,\ t)$ yoğunluğu, $f_1(\vec{q}_1,\ t)\ f_1(\vec{q}_2,\ t)$'e gevşer. Benzer gevşemeler yüksek derece yoğunluklar f_s. için de gerçekleşir.

(ii) Sonraki aşamada, ortalama serbest zaman $\tau_\times$.'in zaman ölçeği boyunca, denklem (III.53)'deki gibi, f_1 bir *yerel denge* biçimine gevşer. Bu, Boltzmann denkleminin sağ tarafındaki çarpışma terimi tarafından belirlenen içsel ölçektir. Bu zaman aralığından sonra, çarpışmalarda korunan nicelikler, bir yerel denge durumuna erişirler. O zaman, her noktada, tüm momentumlar üzerinden integral alarak, (zamana bağlı) bir yerel yoğunluk tanımlayabiliriz,

$$n(\vec{q},t) = \int d^3\vec{p} f_1(\vec{p},\vec{q},t), \tag{III.69}$$

yanısıra, herhangi bir $\mathcal{O}(\vec{p},\vec{q},t)$ operatörü için yerel beklenen değer şöyle tanımlanır:

$$\langle \mathcal{O}(\vec{q},t)\rangle = \frac{1}{n(\vec{q},t)} \int d^3\vec{p} f_1(\vec{p},\vec{q},t)\mathcal{O}(\vec{p},\vec{q},t). \tag{III.70}$$

(iii) Yoğunluk ve beklenen değerler, içsel zaman ölçekleri τ_c ve $\tau_\times$ yerel denge biçimlerine gevşedikten sonra, takiben, daha yavaş, dışsal zaman ve uzunluk ölçeklerinde, genel dengeye bir gevşeme vardır. Bu son aşama, Boltzmann denkleminin sol tarafındaki daha küçük akan terimler tarafından yürütülür. En uygun şekilde, korunumlu niceliklerin, *hidrodinamik denklemleri* uyarınca zamandaki evrimi cinsinden ifade edilir. *Korunumlu nicelikler*, iki parçacık çarpışmalarında değişmeden kalırlar, yani şu koşulu sağlarlar,

$$\chi(\vec{p}_1,\vec{q},t) + \chi(\vec{p}_2,\vec{q},t) = \chi(\vec{p}_1{}',\vec{q},t) + \chi(\vec{p}_2{}',\vec{q},t), \tag{III.71}$$

burada, $(\vec{p}_1,\ \vec{p}_2)$ ve $(\vec{p}_1',\ \vec{p}_2')$, sırasıyla çarpışmadan önce ve sonraki momentumları gösterir. Bu tip nicelikler için şöyle yazılabilir:

$$J_\chi(\vec{q},t) = \int d^3\vec{p}\,\chi(\vec{p},\vec{q},t)\left.\frac{df_1}{dt}\right|_{\text{coll.}}(\vec{p},\vec{q},t) = 0. \quad \text{(III.72)}$$

- **İspat**: Çarpışma integralinin formunu kullanarak, elimizdeki ifade şudur,

$$J_\chi = -\int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^2\vec{b}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\left[f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2) - f_1(\vec{p}_1{}')f_1(\vec{p}_2{}')\right]\chi(\vec{p}_1). \quad \text{(III.73)}$$

(Gösterim kolaylığı için $(\vec{q},\ t)$ bağımsız değişkenleri yazılmamıştır.) Şimdi, H-teoreminin ispatında kullanılmış, aynı değişken dönüşümleri kümesini uygulayalım. İlk adım, $\vec{p}_1$ ve $\vec{p}_2$ değişkenlerini yer değiştirdikten sonra ortalama almaktır:

$$J_\chi = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^2\vec{b}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\left[f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2) - f_1(\vec{p}_1{}')f_1(\vec{p}_2{}')\right]\left[\chi(\vec{p}_1) + \chi(\vec{p}_2)\right]. \quad \text{(III.74)}$$

Sonra, çarpışmanın başındaki $(\vec{p}_1,\ \vec{p}_2, \vec{b})$'den sonucundaki $(\vec{p}_1',\ \vec{p}_2', \vec{b}')$'ye değişken dönüşümü yapalım. İntegral değişkenlerini yeniden isimlendirdiğimizde, yukarıdaki denklem şuna dönüşür,

$$J_\chi = -\frac{1}{2}\int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^2\vec{b}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\left[f_1(\vec{p}_1{}')f_1(\vec{p}_2{}') - f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2)\right]\left[\chi(\vec{p}_1{}') + \chi(\vec{p}_2{}')\right]. \quad \text{(III.75)}$$

Son iki denklemin ortalamasını aldığımızda,

$$\begin{aligned} J_\chi = -\frac{1}{4}\int d^3\vec{p}_1 d^3\vec{p}_2 d^2\vec{b}\,|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|&\left[f_1(\vec{p}_1)f_1(\vec{p}_2) - f_1(\vec{p}_1{}')f_1(\vec{p}_2{}')\right] \\ &\left[\chi(\vec{p}_1) + \chi(\vec{p}_2) - \chi(\vec{p}_1{}') - \chi(\vec{p}_2{}')\right], \end{aligned} \quad \text{(III.76)}$$

ki denklem $(\mathrm{III}.71)$'den sonuç sıfır olur.

χ içeren beklenen değerlerin evriminde, bu sonucun önemini inceleyelim. Denklem $(\mathrm{III}.72)$'deki çarpışma terimini yerine koyduğumuzda, Boltzmann denkleminin sol tarafındaki akan terimler şu sonucu verir:

$$J_\chi(\vec{q},t) = \int d^3\vec{p}\,\chi(\vec{p},\vec{q},t)\left[\partial_t + \frac{p_\alpha}{m}\partial_\alpha + F_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right]f_1(\vec{p},\vec{q},t) = 0, \quad \text{(III.77)}$$

burada, $\partial_t \equiv \partial/\partial t,\ \partial_\alpha \equiv \partial/\partial q_\alpha,$ ve $F_\alpha = -\partial U/\partial q_\alpha$. kısaltmalarını uyguladık. Yukarıdaki denklemi şu biçime getirebiliriz:

$$\int d^3\vec{p}\left\{\left[\partial_t + \frac{p_\alpha}{m}\partial_\alpha + F_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right](\chi f_1) - f_1\left[\partial_t + \frac{p_\alpha}{m}\partial_\alpha + F_\alpha\frac{\partial}{\partial p_\alpha}\right]\chi\right\} = 0. \quad \text{(III.78)}$$

Üçüncü terim bir tam türev olduğundan sıfırdır. Denklem $(\mathrm{III}.70)$'deki beklenen değer tanımını kullanarak diğer terimler yeniden düzenlendiğinde,

$$\partial_t \left(n \langle \chi \rangle\right) + \partial_\alpha \left(n \left\langle \frac{p_\alpha}{m} \chi \right\rangle\right) - n \langle \partial_t \chi \rangle - n \left\langle \frac{p_\alpha}{m} \partial_\alpha \chi \right\rangle - nF_\alpha \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial p_\alpha} \right\rangle = 0. \qquad \text{(III.79)}$$

Daha önce tartışıldığı üzere, esnek çarpışmalarda 5 tane korunan nicelik vardır: parçacık sayısı, momentumun üç bileşeni, ve kinetik enerji. Her biri aşağıda oluşturulduğu gibi bir hidrodinamik denklemine bizi götürür:

(a) *Parçacık sayısı*: Denklem (III.79)'da $\chi = 1$ seçilirse,

$$\partial_t n + \partial_\alpha \left(n u_\alpha\right) = 0, \qquad \text{(III.80)}$$

burada, yerel hızı şöyle tanımladık,

$$\vec{u} \equiv \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle. \qquad \text{(III.81)}$$

Bu denklem, yerel parçacık yoğunluğunun zamana göre değişiminin, bir parçacık akımı $\vec{J}_n = n\vec{u}$.yoluyla olduğunu ifade eder.

(b) *Momentum*: Momentum $\vec{p}$'nin herhangi bir doğrusal fonksiyonu çarpışma sırasında korunur, ve biz aşağıdaki ifadenin korunumunun sonuçlarını inceleyeceğiz,

$$\vec{c} \equiv \frac{\vec{p}}{m} - \vec{u}. \qquad \text{(III.82)}$$

Denklem (III.79)'da c_α'yi yerine koyduğumuzda şunu elde ederiz:

$$\partial_\beta \left(n \left\langle \left(u_\beta + c_\beta\right) c_\alpha \right\rangle\right) + n\partial_t u_\alpha + n\partial_\beta u_\alpha \left\langle u_\beta + c_\beta \right\rangle - n\frac{F_\alpha}{m} = 0. \qquad \text{(III.83)}$$

Denklem (III.81) ve (III.82)'den $\langle c_\alpha \rangle = 0$, oluşundan yararlanarak şöyle yazılabilir:

$$\partial_t u_\alpha + u_\beta \partial_\beta u_\alpha = \frac{F_\alpha}{m} - \frac{1}{mn}\partial_\beta P_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{(III.84)}$$

burada, aşağıdaki basınç tensörü tanımını kullandık,

$$P_{\alpha\beta} \equiv mn \left\langle c_\alpha c_\beta \right\rangle. \qquad \text{(III.85)}$$

Denklemin sol tarafı, Newton denklemi gereğince $\vec{F}_{net}/m$'ye eşit olması gereken $d\vec{u}/dt$, yani, sıvının bir elemanının ivmesidir. Net kuvvet, basınç tensörünün sıvı içindeki değişimlerinden kaynaklanan, bir ek bileşen içerir.

(c) *Kinetik enerji*: Önce, bir ortalama yerel kinetik enerji tanımı yapıp,

$$\varepsilon \equiv \left\langle \frac{mc^2}{2} \right\rangle = \left\langle \frac{p^2}{2m} - \vec{p}\cdot\vec{u} + \frac{mu^2}{2} \right\rangle, \tag{III.86}$$

ve sonra, denklem (III.79)'da χ'yı $mc^2/2$'ye eşit alarak elde edilen korunum yasasını inceleyelim. Uzay ve zaman türevleri için $\partial\varepsilon = mc_\beta \partial c_\beta = -mc_\beta \partial u_\beta$ olduğundan, şunu elde ederiz:

$$\partial_t(n\varepsilon) + \partial_\alpha \left(n \left\langle (u_\alpha + c_\alpha)\frac{mc^2}{2} \right\rangle \right) + nm\partial_t u_\beta \langle c_\beta \rangle + nm\partial_\alpha u_\beta \langle (u_\alpha + c_\alpha) c_\beta \rangle - nF_\alpha \langle c_\alpha \rangle = 0. \tag{III.87}$$

Yukarıdaki denklem, $\langle c_\alpha \rangle = 0$ oluşu kullanılarak şöyle sadeleştirilir:

$$\partial_t(n\varepsilon) + \partial_\alpha (nu_\alpha \varepsilon) + \partial_\alpha \left(n \left\langle c_\alpha \frac{mc^2}{2} \right\rangle \right) + P_{\alpha\beta}\partial_\alpha u_\beta = 0. \tag{III.88}$$

Daha sonra, yukarıdaki denklemin ilk iki terimindeki n bağımlılığını çekerek,

$$\varepsilon\partial_t n + n\partial_t \varepsilon + \varepsilon\partial_\alpha (nu_\alpha) + nu_\alpha \partial_\alpha \varepsilon + \partial_\alpha h_\alpha + P_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} = 0, \tag{III.89}$$

bulunur. Burada aynı zamanda şu tanımlar da yapılmıştır: *yerel ısı akısı*,

$$\vec{h} \equiv \frac{nm}{2} \langle c_\alpha c^2 \rangle, \tag{III.90}$$

ve *germe tensörünün hızı*,

$$u_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}(\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha). \tag{III.91}$$

Denklem ''da birinci ve üçüncü terimleri, denklem ''in yardımıyla yok etmek bizi şu sonuca götürür:

$$\partial_t \varepsilon + u_\alpha \partial_\alpha \varepsilon = -\frac{1}{n}\partial_\alpha h_\alpha - \frac{1}{n} P_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}. \tag{III.92}$$

Açıkça, n, $\vec{u}$, ve ε'u hidrodinamik denklemlerinden çözmek için, $P_{\alpha\beta}$ ve $\vec{h}$'nin ifadelerine ihtiyaç vardır. Bu ifadeler, ya deneysel olarak verilir, ya da önümüzdeki bölümlerde yapılacağı gibi f_1 yoğunluğundan hesaplanır.