MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

8.333: İstatistiksel Mekanik I **Güz 2007** Sınav 3

Değerlendirme Problemleri & Çözümleri

Üçüncü sınıf içi sınav **28/11/07** Çarşamba günü, **14:30 – 16:00** arası yapılacaktır. **26/11/07** Pazartesi günü sınav değerlendirmesiyle uygulama saati olacaktır.

Sınav kapalı kitaptır, ama isterseniz tek sayfa formül kağıdı getirebilirsiniz. Sınav tamamen aşağıdaki problemlerin bir altkümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla, bu problemlerle tanışık ve rahatsanız, sürprizlere yer olmayacaktır!

****

Aşağıdaki bilgileri yararlı bulabilirsiniz:

Fiziksel Sabitler

Elektron kütlesi	$m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} kg$	Proton kütlesi	$m_p \approx 1.7 \times 10^{-27} kg$
Elektron Yükü	$e \approx 1.6 \times 10^{-19} C$	Planck sab./2π	$\hbar \approx 1.1 \times 10^{-34} J s^{-1}$
Işık Hızı	$c \approx 3.0 \times 10^{8} m s^{-1}$	Stefan sabiti	$\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$
Boltzmann sabiti	$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} J K^{-1}$	Avogadro sayısı	$N_0 \approx 6.0 \times 10^{23} mol^{-1}$

Çevrim Çarpanları

$1 atm \equiv 1.0 \times 10^5 N m^{-2}$ $\quad 1 \mathring{A} \equiv 10^{-10} m$ $\quad 1 eV \equiv 1.1 \times 10^4 K$

Termodinamik

$dE = T dS + dW$ Gaz için: $dW = -P dV$ Tel için: $dW = J dx$

Matematiksel Formüller

$\int_0^\infty dx\ x^n\ e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

$\int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]$ $\qquad \lim_{N\to\infty} \ln N! = N \ln N - N$

$\left\langle e^{-ikx} \right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \left\langle x^n \right\rangle$ $\qquad \ln\left\langle e^{-ikx} \right\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-ik)^n}{n!} \left\langle x^n \right\rangle_c$

$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$ $\qquad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

d boyutta birim kürenin yüzey alanı $\qquad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$

1. *Debye–Hückel teorisi ve halka diyagramları*: Virial açılımı, gaz basıncını, $n = N/V$ yoğunluğu cinsinden *analitik* bir açılım olarak verir. Uzun erimli etkileşmeler, ideal gaz durum denkleminde *analitik olmayan* düzeltmelere yolaçabilir. Klasik bir örnek, Debye-Hückel teorisinde, bir kümülant açılımındaki tüm *halka diyagramlarının* toplanmasıyla hesaplanan, plazmalardaki Coulomb etkileşmesidir.

Kolaylık açısından, genel yük dengesini sağlamak için, düzgün bir arka plan pozitif yük yoğunluğu Ne/V içinde hareket eden N elektronlu bir gaz düşünün. Coulomb etkileşmesi şu biçimi alır

$$\mathcal{U}_Q = \sum_{i<j} \mathcal{V}(\vec{q}_i - \vec{q}_j)\,, \qquad \text{ve} \qquad \mathcal{V}(\vec{q}\,) = \frac{e^2}{4\pi|\vec{q}\,|} - c\,.$$

c sabiti arka plandan gelir ve birinci derece düzeltmenin sıfır olmasını sağlar, yani $\int d^3\,\vec{q}\;\mathcal{V}(\vec{q}) = 0$.

(a) $\mathcal{V}(\vec{q})$'nin Fourier dönüşümünün aşağıdaki biçimde olduğunu gösteriniz

$$\tilde{\mathcal{V}}\,(\vec{\omega}\,) = \begin{cases} e^2/\omega^2 & \text{eğer } \vec{\omega} \neq 0 \\ 0 & \text{eğer } \vec{\omega} = 0 \end{cases}\,.$$

(b) $\langle \mathcal{U}_Q^\ell \rangle_c^0$ için kümülant açılımında, sadece bir halka oluşturan diyagramları tutacağız; bu halkalar aşağıdakiyle orantılıdır:

$$R_\ell = \int \frac{d^3\vec{q}_1}{V} \cdots \frac{d^3\vec{q}_\ell}{V}\, \mathcal{V}(\vec{q}_1 - \vec{q}_2)\mathcal{V}(\vec{q}_2 - \vec{q}_3) \cdots \mathcal{V}(\vec{q}_\ell - \vec{q}_1).$$

Fourier dönüşümlerinin özelliklerini kullanarak şunu gösteriniz

$$R_\ell = \frac{1}{V^{\ell-1}} \int \frac{d^3\vec{\omega}}{(2\pi)^3}\, \tilde{\mathcal{V}}(\vec{\omega})^\ell.$$

(c) $\langle \mathcal{U}_Q^\ell \rangle_c^0$'de oluşturulan halka grafiklerinin sayısının şöyle olduğunu gösteriniz.

$$S_\ell = \frac{N!}{(N-\ell)!} \times \frac{(\ell-1)!}{2} \approx \frac{(\ell-1)!}{2} N^\ell\,.$$

(d) Halka diyagramlarının katkılarının şu şekilde toplanabileceğini gösteriniz,

$$\begin{aligned} \ln Z_{\text{halka}} &- \ln Z_0 + \sum_{\ell=2}^{\infty} \frac{(-\beta)^\ell}{\ell!} S_\ell R_\ell \\ &\approx \ln Z_0 + \frac{V}{2} \int_0^\infty \frac{4\pi\omega^2 d\omega}{(2\pi)^3} \left[\left(\frac{\kappa}{\omega}\right)^2 - \ln\left(1 + \frac{\kappa^2}{\omega^2}\right) \right], \end{aligned}$$

burada, $\kappa = \sqrt{\beta e^2 N/V}$ Debye perdeleme uzunluğunun tersidir.

(*İpucu*: $\ln(1+x) = -\sum_{\ell=1}^{\infty}(-x)^l/\ell$ açılımını kullanın.)

(e) Önceki şıktaki integral, $x = \kappa/\omega$ değişken dönüşümüyle ve kısmi integral alımıyla basitleştirilebilir. Nihai sonucun şöyle olduğunu gösteriniz,

$$\ln Z_{\text{halka}} = \ln Z_0 + \frac{V}{12\pi}\kappa^3 \quad .$$

(f) Yukarıdaki halka diyagramlarından basınca gelen düzeltmeyi hesaplayınız.

(g) İki parçacık arasında bir $\overline{V}(\vec{q}-\vec{q}\,')$ etkin potansiyelini, diğer tüm parçacıkların koordinatları üzerinden integral alarak tanımlayabiliriz. Bu, bir kümülant açılımında pertürbatif olarak hesaplanabilen bir beklenen değere denktir. Eğer sadece parçacıklar arasında döngüsüz diyagramları (halkaların benzeri) dahil edersek, elimizde,

$$\overline{V}(\vec{q}-\vec{q}\,') = V(\vec{q}-\vec{q}\,') + \sum_{\ell=1}^{\infty}(-\beta N)^{\ell}\int \frac{d^3\vec{q}_1}{V}\cdots\frac{d^3\vec{q}_\ell}{V}\,\mathcal{V}(\vec{q}-\vec{q}_1)\mathcal{V}(\vec{q}_1-\vec{q}_2)\cdots\mathcal{V}(\vec{q}_\ell-\vec{q}\,').$$

Bu toplamın, perdelenmiş Coulomb etkileşmesi $\overline{V}(\vec{q}) = \exp(-\kappa|\vec{q}|)/(4\pi|\vec{q}|)$'ye götüreceğini gösteriniz.

****

2. *Virial katsayıları*: d-boyutlu uzayda, ikili merkezi potansiyel $\mathcal{V}(r)$ ile etkileşen parçacıkların bir gazını düşünün, burada potansiyel şöyle tanımlıdır,

$$\mathcal{V}(r) = \begin{cases} +\infty & \text{eğer } 0 < r < a, \\ -\varepsilon & \text{eğer } a < r < b, \\ 0 & \text{eğer } b < r < \infty. \end{cases}$$

(a) İkinci virial katsayısı $B_2(T)$'yi hesaplayınız, ve yüksek ve düşük sıcaklık davranışını yorumlayınız.

(b) Aşağıdaki eşısıl sıkıştırılabilirliğe ilk düzeltmeyi hesaplayınız.

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left.\frac{\partial V}{\partial P}\right|_{T,N} .$$

(c) Yüksek sıcaklık limitinde, durum denklemini van der Waals biçiminde düzenleyiniz ve van der Waals parametrelerini belirleyiniz.

(d) $b = a$ (sert küre), ve $d = 1$ için, üçüncü virial katsayısı $B_3(T)$'ü hesaplayınız.

****

3. *Dieterici denklemi*: Bir gaz Dieterici durum denklemini sağlamaktadır:

$$P(v-b) = k_B T \exp\left(-\frac{a}{k_B T v}\right),$$

burada $v = V/N$.

(a) Kritik noktada Pv/k_BT oranını bulunuz.

(b) Eşısıl sıkıştırılabilirlik κ_T'yı, $v = v_c$ için, $T - T_c$'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız.

(c) Kritik eşısıl eğrisi üzerinde basıncı $(v - v_c)$'nin sıfırdan farklı en küçük mertebesine kadar açınız.

****

4. *İki boyutlu Coulomb gazı*: Alanı $A = L \times L$ olan *iki boyutlu* bir kutuda N tane pozitif ve N tane negatif yüklü klasik parçacıkların karışımını düşünün. Hamiltonyen şöyledir,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} - \sum_{i<j}^{2N} c_i c_j \ln |\vec{q}_i - \vec{q}_j| \quad ,$$

burada, $i = 1,\ldots N$ ise $c_i = +c_0$ ve $i = N+1,\ldots 2N$ ise $c_i = -c_0$ parçacıkların yüklerini, $\{\vec{q}_i\}$ ve $\{\vec{p}_i\}$ sırasıyla koordinat ve momentumlarını gösterir.

(a) Dikkat edilirse, etkileşme teriminde her çift sadece bir kez görünür ve kendiyle etkileşme, $i = j$, yoktur. Kaç çift için itici, ve kaç tanesi için çekici etkileşme vardır?

(b) Üleşim fonksiyonu $Z(N,T,A)$ için $\{\vec{q}_i\}$ ve $\{\vec{p}_i\}$ üzerinden integraller cinsinden bir ifade yazınız. Momentumlar üzerinden integralleri alın ve koordinatların katkılarını, $\{\vec{q}_i\}$'nin kuvvetlerini içeren bir çarpım olarak, $e^{\ln x} = x$ eşitliğini kullanarak yeniden yazınız.

(c) $\{\vec{q}_i\}$ üzerinden integralleri kesin olarak almak mümkün olmasa da, Z'nin A'ya bağımlılığı, koordinatların basit bir yeniden ölçeklendirilmesiyle, $\vec{q}_i' = \vec{q}_i/L$, elde edilebilir. (a) ve (b) şıklarındaki sonuçları kullanarak $Z \propto A^{2N - \beta c_0^2 N/2}$ olduğunu gösteriniz.

(d) Bu gazın iki boyutlu basıncını hesaplayınız, ve yüksek ve düşük sıcaklık davranışlarını yorumlayınız.

(e) Düşük sıcaklıklardaki bu fiziksel olmayan davranıştan, herhangi iki parçacığın bir a mesafesinden daha yakına gelmesini engelleyen bir sert çekirdek eklenerek kaçınılır. İki uzunluk ölçeği a ve L'nin bulunması, (c) şıkkındaki ölçekleme analizini şüpheli kılar. $N = 1$ için üleşim fonksiyonunu inceleyerek, önceki şıkkın sonucunu geçersiz kılacak biçimde üleşim fonksiyonunun hesabında kısa mesafe ölçeği a'nın önemli hale geldiği T_c sıcaklığı için bir tahminde bulununuz. Bu sistemin düşük ve yüksek sıcaklıklardaki fazları nelerdir?

****

5. Bir boyutlu gazın kesin çözümleri: İstatistiksel mekanikte, *kesin* olarak çözülebilen çok az etkileşen parçacık sistemi vardır. Bu tür kesin çözümler, çeşitli yaklaşımların güvenirliğini kontrol etmeyi sağladıkları için çok önemlidirler. Kısa erimli etkileşmelerle bir boyutlu bir gaz, bu tür çözülebilir bir durumdur.

(a) Daha uzak komşularla etkileşmeleri perdeleyen sert çekirdekli bir potansiyel için N tane parçacığın Hamiltonyeninin şöyle yazılabileceğini gösterin.

$$\mathcal{H} - \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i=2}^{N} \mathcal{V}(x_i - x_{i-1}).$$

(Ayırt edilemez) parçacıklar, $\{x_i\}$ koordinatlarıyla işaretlenmiştir, öyle ki

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_N \leq L,$$

burada L parçacıkları sınırlandıran kutunun uzunluğudur.

(b) Üleşim fonksiyonu $Z(T, N, L)$ için ifadeyi yazınız. Değişkenleri $\delta_1 = x_1$, $\delta_2 = x_2 - x_1, \cdots$, $\delta_N = x_N - x_{N-1}$ biçiminde değiştiriniz, ve izin verilen integral aralıkları ile kısıtları dikkatlice belirtiniz.

(c) Laplace dönüşümünden elde edilen Gibbs üleşim fonksiyonunu ele alalım,

$$\mathcal{Z}(T, N, P) = \int_0^\infty dL \exp(-\beta PL) Z(T, N, L),$$

ve integrandın uç değerlerini belirleyerek, kanonik toplulukta P'nin standart fomülünü bulunuz.

(d) Değişkenleri L'den $\delta_{N+1} = L - \sum_{i=1}^{N} \delta_i$'e çeviriniz ve $\mathcal{Z}(T, N, P)$'nin ifadesini, her δ_i üzerinden integrallerin çarpımı olarak bulunuz.

(e) Sabit bir P basıncında, ortalama uzunluk $L(T, N, P)$ ve yoğunluk $n = N/L(T, N, P)$ için ifadeleri bulunuz (yorumlaması kolay integrallerin oranlarını içeren).

Herhangi bir olası potansiyel seçimi için (e) şıkkındaki $n(T, P)$ sürekli ve tekil olmayan bir ifade olduğundan, aslında bir boyutlu gazda yoğuşma geçişi bulunmaz. Tersine, yaklaşık van der Waals denklemi (ya da ortalama alan hesabı) yanlış biçimde böyle bir geçiş öngörür.

(f) Parçacıklar arası minimum mesafesi a olan bir sert küre gazının durum denklemi $P(T, n)$'yi hesaplayınız. Dışlanan hacim oranını önceki problemlerde bulunan yaklaşık sonuçla karşılaştırınız, ve ayrıca genel virial katsayısı $B_\ell(T)$'yi elde ediniz.

****

6. *Bir boyutlu zincir*: m kütleli $N + 1$ tane parçacıktan oluşan bir zincir, N tane kütlesiz, yay sabiti K ve gevşemiş uzunluğu a olan yayla bağlanmıştır. İlk ve son parçacıklar Na denge mesafesinde sabit tutulmaktadır. Parçacıkların denge konumlarından boyuna yer değiştirmelerini $\{u_i\}$ ile gösterelim; uçtaki parçacıklar sabit olduğundan $u_0 = u_N = 0$. $\{u_i\}$ ve eşlenik $\{p_i\}$ momentumlarını yöneten Hamiltonyen şöyledir.

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N-1} \frac{p_i^2}{2m} + \frac{K}{2}\left[u_1^2 + \sum_{i=1}^{N-2} (u_{i+1} - u_i)^2 + u_{N-1}^2\right].$$

(a) Uygun (sinüs) Fourier dönüşümünü kullanarak normal modlar $\{\tilde{u}_k\}$ ve ilgili frekanslar $\{\omega_k\}$'yı bulunuz.

(b) Hamiltonyeni normal modların genlikleri $\{\tilde{u}_k\}$ cinsinden ifade ediniz ve *klasik* üleşim fonksiyonunu hesaplayınız. ($\{u_i\}$ integrallerini $-\infty$'dan $+\infty$'a alabilirsiniz.)

(c) Önce $\langle|\tilde{u}|^2\rangle$'yi bulunuz ve sonucu kullanarak $\{u_i^2\}$'yi hesaplayınız. Hesaplanan, her parçacığın yerdeğiştirmesinin karesini denge konumunun fonksiyonu olarak çiziniz.

(d) Eğer sadece birinci parçacık sabit $(u_0 = 0)$, diğer uç serbest $(u_N \neq 0)$ ise sonuçlar nasıl değişir? (Dikkat edilirse, üleşim fonksiyonu, değişkenleri $N - 1$ tane yay uzamalarına değiştirerek hesaplanabildiğinden, bu, çok daha basit bir problemdir.)

****

7. *Kara delik termodinamiği*: Bekenstein ve Hawking'e göre, bir kara deliğin entropisi alanı A ile orantılıdır ve şöyle verilir,

$$S = \frac{k_B c^3}{4G\hbar} A \quad .$$

(a) Klasik mekaniği kullanarak M kütleli bir cisimden R yarıçapı uzaklıkta kaçış hızını hesaplayınız. Bu kaçış hızını ışık hızı c alarak, kara deliğin yarıçapı ve kütlesi arasında bir bağıntı bulunuz. (İlk olarak Laplace tarafından elde edilen bu sonucu göreceli hesaplamalar değiştirmez.)

(b) İki kara delik birleşip tek olduğunda entropi artar mı, azalır mı? Güneş kadar kütlesi olan ($M_\odot \approx 2 \times 10^{30}\mathrm{kg}$) iki kara delik birleştiğinde evrenin entropi değişimi (denk bilginin bit sayısı cinsinden) nedir?

(c) Kara deliğin içsel enerjisi Einstein bağıntısı $E = Mc^2$ ile verilir.Kara deliğin sıcaklığını kütlesi cinsinden bulunuz.

(d) Bir “kara delik” aslında, olay ufkunda çift yaratım süreçleri sayesinde, termal radyasyon yayar. Bu tür ışıma dolayısıyla enerji kaybetme hızını bulunuz.

(e) Yalıtılmış bir kara deliğin buharlaşması için gereken zamanı bulunuz. Güneş kütleli bir kara delik için bu süre ne kadardır?

(f) Mevcut kozmik arkaplan radyasyonu $T = 2.7°K$ ile termal dengede bir kara deliğin kütlesi nedir?

(g) Uzayın yarıçapı R olan küresel bir hacmini düşünün. Son zamanlarda formüle edilen *Hologram İlkesi*’ne göre, içeriğinden bağımsız olarak(!) bu uzay hacminin sahip olabileceği entropinin bir maksimum değeri vardır. Bu maksimum entropi nedir?

****

8. *Kuantum harmonik salınıcı*: Hamiltonyeni aşağıdaki gibi olan tek bir harmonik salınıcıyı ele alalım.

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}, \qquad p = \frac{\hbar}{i}\frac{d}{dq} \quad .$$

(a) Üleşim fonksiyonu Z’yi T sıcaklığında bulunuz, ve $\langle \mathcal{H} \rangle$ enerjisini hesaplayınız.

(b) Kanonik yoğunluk matrisi ρ için, $\mathcal{H}$’nin özdurumları ($\{|n\rangle\}$) ve enerji seviyeleri ($\{\varepsilon_n\}$) cinsinden, formal ifadeyi yazınız.

(c) Genel bir operatör $A(x)$ için şunu gösteriniz:

$$\frac{\partial}{\partial x} \exp\left[A(x)\right] \neq \frac{\partial A}{\partial x} \exp\left[A(x)\right], \qquad \text{eğer} \quad \left[A, \frac{\partial A}{\partial x}\right] = 0 \quad \text{değilse,}$$

ancak her durumda,

$$\frac{\partial}{\partial x} \operatorname{tr}\left\{\exp\left[A(x)\right]\right\} = \operatorname{tr}\left\{\frac{\partial A}{\partial x} \exp\left[A(x)\right]\right\}.$$

(d) Dikkat edilirse, (a) şıkkında hesaplanan üleşim fonksiyonu kütle m’den bağımsızdır, yani $\partial Z/\partial m = 0$. Bu bilgiyi (c) şıkkındaki sonuçla birlikte kullanarak, şunu gösteriniz,

$$\left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \left\langle \frac{m\omega^2 q^2}{2} \right\rangle.$$

(e) (d) ve (a) şıklarının sonuçlarını kullanarak, veya başka yoldan, $\langle q^2 \rangle$’yi hesaplayınız. Problem 6’daki sonuçlar kuantum mekaniksel etkilerin dahil edilmesiyle düşük sıcaklıklarda nasıl değişir?

(f) Bir koordinat gösteriminde, $\langle q'|\rho|q\rangle$’yu yüksek sıcaklık limitinde hesaplayınız. Bir yaklaşım, aşağıdaki sonucu kullanmaktır,

$$\exp(\beta A)\exp(\beta B) = \exp\left[\beta(A+B) + \beta^2[A,B]/2 + \mathcal{O}(\beta^3)\right].$$

(g) Düşük sıcaklıklarda, ρ'da düşük enerjili durumlar baskındır. Taban durum dalga fonksiyonunu kullanıp, $\langle q'|\rho|q\rangle$'nun $T \to 0$ limitindeki davranışını değerlendiriniz.
(h) $\langle q'|\rho|q\rangle$'nun tam ifadesini hesaplayınız.

****

9. *Göreceli Coulomb gazı*: $V = L^3$ hacimli bir kutuda N tane pozitif ve N tane negatif yüklü göreceli parçacığın bir göreceli sistemini düşünün. Hamiltonyen şöyledir,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2N} c|\vec{p}_i| + \sum_{i<j}^{2N} \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad ,$$

burada $i = 1, \cdots N$ ise $e_i = +e_0$, ve $i = N+1, \cdots 2N$ ise $e_i = -e_0$ parçacıkların yüklerini temsil eder; $\{\vec{r}_i\}$ ve $\{\vec{p}_i\}$ ise ilgili koordinat ve momentlerdir. Bu, çözmek için çok karmaşık bir sistem olmakla beraber yine de bazı kesin sonuçlar elde etmek mümkündür.
(a) Özdeğerler $\varepsilon_n(L)$ ve özfonksiyonlar (konum uzayında) $\Psi_n(\{\vec{r}\})$ için Schrödinger denklemini yazınız. Parçacıkların bozon ya da fermion olmasına göre $\Psi_n(\{\vec{r}\})$ üzerine uygulanacak kısıtları yazınız.
(b) $\vec{r}_i' = \vec{r}_i/L$ ölçek değişimiyle özdeğerlerin $\varepsilon_n(L) = \varepsilon_n(1)/L$ ölçek değişimini sağladığını gösteriniz.
(c) Üleşim fonksiyonu $Z(N,V,T)$'nin, özdeğerler $\{\varepsilon_n(L)\}$ cinsiden olan genel biçimini kullanarak Z'nin T ve V'ye ayrı ayrı bağlı olmadığını fakat farklı oranlarda özel bir kombinasyonla bağlı olduğunu gösteriniz.
(d) Gazın E enerjisini ve P basıncını üleşim fonksiyonunun değişimleriyle ilişkilendiriniz. $E = 3PV$ kesin sonucunu kanıtlayınız.
(e) d boyutlu bir uzayda Coulomb etkileşmesi uzaklıkla $e_i e_j/|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{d-2}$ ($d = 2$'de logaritmik bir etkileşim vardır.) Hangi d boyutunda *göreceli olmayan* parçacıklar için E ve P arasında kesin bir ilişki kurabilirsiniz (kinetik enerji $\sum_i \vec{p}_i^2/2m$)? Enerji ve basınç için karşılık gelen kesin ilişki nasıldır?
(f) Yukarıdaki 'kesin' ölçekleme yasasının neden yoğun (sıvı ya da katı) Colulomb karışımlarında geçerli olması beklenmez?

****

10. *Virial teoremi* N (klasik ya da kuantum) parçacıktan oluşan bir sistem için faz uzayının ölçek değişimi gibi kanonik dönüşümler altında değişmez kalmasının bir sonucudur. Sorunun devamında genelleştirilmiş koordinatları ve momentumları ve $(i = 1, \dots, N)$ olan N parçacağın Hamiltonyenini $\mathcal{H}(\{\vec{p}_i\}, \{\vec{q}_i\})$ olarak düşününüz.

(a) *Klasik model*: Klasik üleşim fonksiyonunun, $Z \equiv Z[\mathcal{H}]$, ifadesini yazınız ve $\vec{q}_1 \rightarrow \lambda\vec{q}_1,\ \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1/\lambda$ değişimi gibi bir çift eşlenik değişkenin yeniden ölçeklendirilmesi altında değişmez olduğunu gösteriniz. Örneğin $Z[\mathcal{H}_\lambda]$ λ'dan bağımsızdır, ki burada $\mathcal{H}_\lambda$ yukarıdaki ölçeklendirmeden sonra elde edilen Hamiltonyendir.

(b) *Kuantum mekaniksel model*: Kuantum üleşim fonksiyonunu veren ifadeyi yazınız. $\vec{q}_1 \rightarrow \lambda\vec{q}_1,\ \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1/\lambda$ dönüşümleri altında bu üleşim fonksiyonunun da değişmez olduğunu gösteriniz. Burada $\vec{p}_i$ ve $\vec{q}_i$ artık kuantum mekaniksel operatörlerdir. (İpucu: zamandan bağımsız Schrödinger denklemiyle başlayın.)

(c) Aşağıdaki biçimde bir Hamiltonyen varsayalım

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^{\ 2}}{2m} + V\left(\{\vec{q}_i\}\right).$$

$Z[\mathcal{H}_\lambda]$'nin λ'dan bağımsız olduğu sonucunu kullanarak *virial* ilişkisini kanıtlayınız,

$$\left\langle \frac{\vec{p}_1^{\ 2}}{m} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \vec{q}_1} \cdot \vec{q}_1 \right\rangle,$$

burada parantezler termal ortalamaları gösterir. (Cevabınızı, muhtemel bir kuantum mekaniksel çıkarım da benzer olduğu için klasik olarak formüle edebilirsiniz.)

(d) Yukarıdaki ilişki bazen uzak galaksilerin kütlelerini tahmin etmek için kullanılır. G-8.333 galaksisinin dış sınırındaki yıldızların $v \approx 200$ km/s hızla hareket ettiği ölçülmüştür. G-8.333 'ün kütlesinin boyutuna oranını sayısal olarak tahmin ediniz.

****