

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği
2007 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için

<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr>

sitesini ziyaret ediniz.

Değerlendirme Problemleri

İkinci sınıf içi sınav **24/10/07** Çarşamba günü, **14:30 – 16:00** arası yapılacaktır. **22/10/07** Pazartesi günü sınav değerlendirmesiyle uygulama saati olacaktır.

Sınav kapalı kitaptır, ama isterseniz tek sayfa formül kağıdı getirebilirsiniz. Sınav tamamen aşağıdaki problemlerin bir altkümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla, bu problemlerle tanışık ve rahatsanız, sürprizlere yer olmayacaktır!

Aşağıdaki bilgileri yararlı bulabilirsiniz:

Fiziksel Sabitler

Elektron kütlesi	$m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} kg$	Proton kütlesi	$m_p \approx 1.7 \times 10^{-27} kg$
Elektron Yüğü	$e \approx 1.6 \times 10^{-19} C$	Planck sab./ 2π	$\hbar \approx 1.1 \times 10^{-34} Js^{-1}$
Işık Hızı	$c \approx 3.0 \times 10^8 ms^{-1}$	Stefan sabiti	$\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} Wm^{-2}K^{-4}$
Boltzmann sabiti	$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} JK^{-1}$	Avogadro sayısı	$N_0 \approx 6.0 \times 10^{23} mol^{-1}$

Çevrim Çarpanları

$$1 atm \equiv 1.0 \times 10^5 Nm^{-2}$$

$$1 \text{Å} \equiv 10^{-10} m$$

$$1 eV \equiv 1.1 \times 10^4 K$$

Termodinamik

$$dE = TdS + dW$$

$$\text{Gaz için: } dW = -PdV$$

$$\text{Tel için: } dW = Jdx$$

Matematiksel Formüller

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx \exp \left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2} \right] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp \left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2} \right]$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln N! = N \ln N - N$$

$$\langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

$$\ln \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$\sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

d boyutta birim kürenin yüzey alanı

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$$

1. *Bir boyutlu gaz:* Isıl dengede bir gaz parçacığı aniden tek boyutlu bir tuzak ile sınırlandırılmıştır. İlgili karışık durum, $f(p) = \exp(-p^2/2mk_B T)/\sqrt{2\pi mk_B T}$ olmak üzere, ilk yoğunluk fonksiyonu $\rho(q, p, t = 0) = \delta(q)f(p)$ ile tanımlanır.

(a) Liouville denkleminden başlayarak, $\rho(q, p, t)$ 'yu türetiniz ve (q, p) düzleminde çiziniz.

• Faz uzayı yoğunluğunun sıkıştırılmaz doğasını tanımlayan Liouville denklemi şöyledir:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\dot{q} \frac{\partial \rho}{\partial q} - \dot{p} \frac{\partial \rho}{\partial p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} \frac{\partial \rho}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} \frac{\partial \rho}{\partial p} \equiv -\{\rho, \mathcal{H}\}.$$

1-boyutlu tuzakla sınırlanmış gaz parçacığı için, Hamiltonyen aşağıdaki gibi yazılabilir

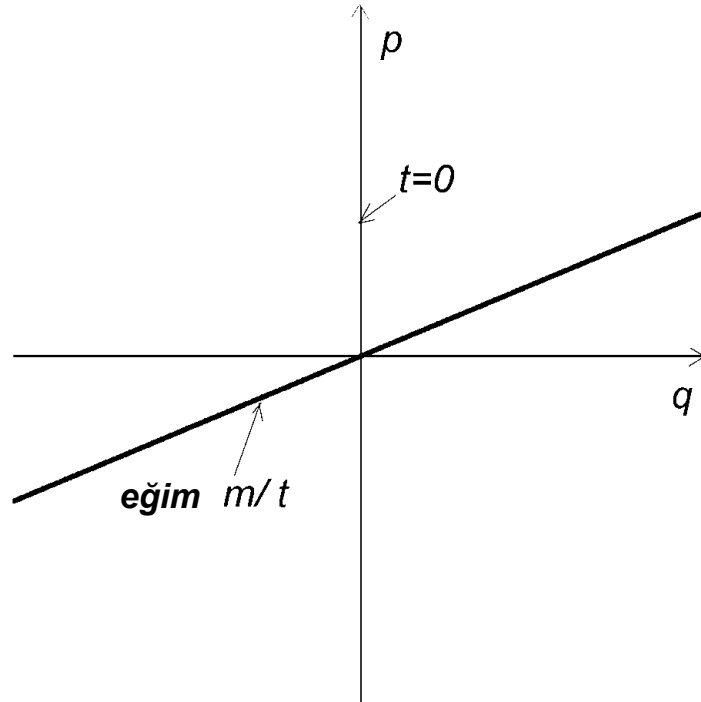
$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + V(q_x) = \frac{p^2}{2m},$$

çünkü $V_{q_x} = 0$, ve y ve z yönlerinde hareket yoktur. Bu Hamiltonyen ile Liouville denklemi şöyle olur:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \rho}{\partial q},$$

çözümü, belirtilen başlangıç koşullarına tabi olduğunda şöyledir:

$$\rho(q, p, t) = \rho\left(q - \frac{p}{m}t, p, 0\right) = \delta\left(q - \frac{p}{m}t\right) f(p).$$



(b) $t > 0$ 'da $\langle q^2 \rangle$ ve $\langle p^2 \rangle$ ortalamaları için ifadeleri türetiniz.

- Herhangi bir gözlemlenebilir $\mathcal{O}$ için beklenen değer

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \int d\Gamma \mathcal{O} \rho(\Gamma, t),$$

ve böylece

$$\begin{aligned} \langle p^2 \rangle &= \int p^2 f(p) \delta \left(q - \frac{p}{m} t \right) dp dq = \int p^2 f(p) dp \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dp p^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi m k_B T}} \exp \left(-\frac{p^2}{2m k_B T} \right) = m k_B T. \end{aligned}$$

Aynı şekilde, şunu elde ederiz:

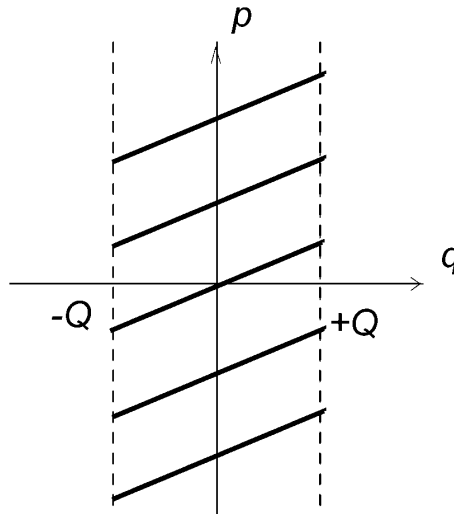
$$\langle q^2 \rangle = \int q^2 f(p) \delta \left(q - \frac{p}{m} t \right) dp dq = \int \left(\frac{p}{m} t \right)^2 f(p) dp = \left(\frac{t}{m} \right)^2 \int p^2 f(p) dp = \frac{k_B T}{m} t^2.$$

(c) $q = \pm Q$ 'ya sert duvarların yerleştirildiğini varsayalım. τ uygun büyüklükte bir gevşeme zamanı olmak üzere, $\rho(q, p, t \gg \tau)$ 'yu tanımlayınız.

- Şimdi de sert duvarların $q = \pm Q$ 'ya yerleştirildiğini varsayalım. Uygun büyüklükteki gevşeme zamanı τ , duvarlar arasındaki karakteristik uzunluk bölü parçacığın karakteristik hızıdır, yani

$$\tau \sim \frac{2Q}{|\dot{q}|} = \frac{2Qm}{\sqrt{\langle p^2 \rangle}} = 2Q \sqrt{\frac{m}{k_B T}}.$$

Başlangıçta $\rho(q, p, t)$ (a) şıkında gösterilen dağılıma benzerdir, ancak parçacığın bariyere her çarpışında yansıma p 'yi $-p$ 'ye değiştirir. Zaman geçtikçe eğimler azalır ve $\rho(q, p, t)$ aralarındaki mesafe $2mQ/t$ olarak sıfıra giden bir dizi yakın aralıklı çizgi haline gelir.



(d) Bir “kabalaştırılmış” yoğunluk olan $\tilde{\rho}$, (q, p) düzleminde ρ ’nun bir küçük çözünürlüğün altındaki değişimleri ihmal edilerek, yani çözünürlük alanı hücreleri üzerinde ρ ’nun ortalaması alınarak, elde edilir. (c) şıkkındaki durum için $\tilde{\rho}(q, p)$ ’yu bulunuz, ve durağan olduğunu gösteriniz.

- Bu alanın pikseller dizisine bölünmesiyle, (p, q) uzayında herhangi bir ε çözünürlüğü seçebiliriz: düzlemi bu alana eşit piksellerin bir dizisine bölümleyerek. Herhangi bir ε için, yeterince uzun bir zaman sonra birçok çizgiler bu alandan geçecektir. Onların üzerinden ortalama alarak,

$$\tilde{\rho}(q, p, t \gg \tau) = \frac{1}{2Q} f(p),$$

elde edilir, çünkü: (i) her p ’deki $f(p)$ yoğunluğu her zaman aynıdır, ve (ii) $q \in [-Q, +Q]$ boyunca tüm noktalar eşit derecede olasıdır. Bu kabalaştırılmış yoğunluğun zamana göre değişimi için şunu buluruz,

$$\frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial q} = 0, \text{ yani } \tilde{\rho} \text{ durağandır.}$$

2. Entropinin evrimi: Normalleştirilmiş topluluk yoğunluğu, Γ faz uzayında bir olasılıktır. Bu olasılık, ilişkili bir entropiye, $S(t) = - \int d\Gamma \rho(\Gamma, t) \ln \rho(\Gamma, t)$ ’e sahiptir.

(a) Eğer $\rho(\Gamma, t)$ bir $\mathcal{H}$ Hamiltonyeni için Liouville denklemini sağlıyorsa, $dS/dt = 0$ olduğunu gösteriniz.

- Bir “entropi” adayı şöyle tanımlanır:

$$S(t) = - \int d\Gamma \rho(\Gamma, t) \ln \rho(\Gamma, t) = - \langle \ln \rho(\Gamma, t) \rangle .$$

Zamana göre türev alındığında şu denklem elde edilir:

$$\frac{dS}{dt} = - \int d\Gamma \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \ln \rho + \rho \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) = - \int d\Gamma \frac{\partial \rho}{\partial t} (\ln \rho + 1) .$$

Liouville teoreminden elde edilen $\partial \rho / \partial t$ ifadesinin yerine konulması şu sonucu verir:

$$\frac{dS}{dt} = - \int d\Gamma \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} - \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \right) (\ln \rho + 1) .$$

(Burada i takısı, N tane parçacığın yanı sıra, 3 koordinatı işaretlemek için kullanılır ve bundan dolayı 1'den $3N$ 'ye kadar değerler alır.) Yukarıdaki ifadenin kısmi integrali şunu verir,[†]

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \int d\Gamma \sum_{i=1}^{3N} \left[\rho \frac{\partial}{\partial p_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} (\ln \rho + 1) \right) - \rho \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} (\ln \rho + 1) \right) \right] \\ &= \int d\Gamma \sum_{i=1}^{3N} \left[\rho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} (\ln \rho + 1) + \rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} - \rho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} (\ln \rho + 1) - \rho \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right] \\ &= \int d\Gamma \sum_{i=1}^{3N} \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q_i} \frac{\partial \rho}{\partial p_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \right]. \end{aligned}$$

Son ifadenin kısmi integrali şunu verir:

$$\frac{dS}{dt} = - \int d\Gamma \sum_{i=1}^{3N} \left[-\rho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial p_i \partial q_i} + \rho \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial q_i \partial p_i} \right] = 0.$$

(b) Lagrange çarpanları yöntemini kullanarak, $S[\rho]$ fonksiyoneli, sabit ortalama enerji, $\langle \mathcal{H} \rangle = \int d\Gamma \rho \mathcal{H} = E$, kısıtı altında maksimum yapan $\rho_{\max}(\Gamma)$ fonksiyonunu bulunuz.

- Aşağıda sırasıyla yazılan iki kısıt, normalleştirme ve sabit ortalama enerji, vardır

$$\int d\Gamma \rho(\Gamma) = 1, \quad \text{ve} \quad \langle \mathcal{H} \rangle = \int d\Gamma \rho(\Gamma) \mathcal{H} = E.$$

Entropi için ifadenin yeniden yazılmasıyla:

$$S(t) = \int d\Gamma \rho(\Gamma) [-\ln \rho(\Gamma) - \alpha - \beta \mathcal{H}] + \alpha + \beta E,$$

[†] Bu standart kısmi integraldir, yani $\int_b^a F dG = FG|_b^a - \int_b^a G dF$. Bu problemde integrali alınacak ifadenin bir terimine açıkça bakıldığında,

$$\int \prod_{i=1}^{3N} dV_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = \int dq_1 dp_1 \cdots dq_i dp_i \cdots dq_{3N} dp_{3N} \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i},$$

$dG = dq_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i}$, ve ifadenin geri kalanını F olarak tanımlarız. Kutunun sınırlarında $\rho(q_i) = 0$ olduğu hatırlanırsa, şunu elde ederiz,

$$\int \prod_{i=1}^{3N} dV_i \frac{\partial \rho}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} = - \int \prod_{i=1}^{3N} dV_i \rho \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i}.$$

burada α ve β , bu iki kısıtı zorlamak için kullanılan Lagrange çarpanlarıdır. $\rho(\Gamma)$ fonksiyonuna göre yukarıdaki ifadenin uç noktaları hesaplandığında,

$$\left. \frac{\partial S}{\partial \rho(\Gamma)} \right|_{\rho=\rho_{max}} = -\ln \rho_{max}(\Gamma) - \alpha - \beta \mathcal{H}(\Gamma) - 1 = 0.$$

Bu eşitliğin çözümü

$$\ln \rho_{max} = -(\alpha + 1) - \beta \mathcal{H},$$

şu şekilde yeniden yazılabilir:

$$\rho_{max} = C \exp(-\beta \mathcal{H}), \quad \text{where } C = e^{-(\alpha+1)}.$$

(c) (b) şıkkındaki çözümün durağan, yani $\partial \rho_{max} / \partial t = 0$ olduğunu gösteriniz.

- (b) şıkkında elde edilen yoğunluk, şuradan da kolaylıkla kontrol edilebileceği üzere, durağandır:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{max}}{\partial t} &= -\{\rho_{max}, \mathcal{H}\} = -\{C e^{-\beta \mathcal{H}}, \mathcal{H}\} \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} C(-\beta) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} e^{-\beta \mathcal{H}} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} C(-\beta) \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} e^{-\beta \mathcal{H}} = 0. \end{aligned}$$

(d) Sistem, (b)'deki denge yoğunluğuna yaklaşırken, entropide gözlenen artış, (a)'daki sonuçla nasıl bağdaştırılabilir? (İpucu: Önceki problemde karşılaşılan durumu düşünün.)

- Liouville denklemi, OYF $\rho(\Gamma, t)$ 'nin bilgi içeriğini korur ve bu nedenle $S(t)$ zamanla artmaz. Ancak, problem 1'deki örnekte gösterildiği gibi, yoğunluk, faz uzayında daha ince dağılmış hale gelir. Faz uzayının herhangi bir kabalaştırılması varlığında, bilgi kaybolur. $\tilde{\rho}$ 'ya karşılık gelen maksimum entropi, bu anlamda dengeyi tanımlar.

3. Vlasov denklemi, yüksek parçacık yoğunluğu $n = N/V$ veya parçacıklar arası büyük etkileşme menzili λ limitinde, öyle ki $n\lambda^3 \gg 1$, elde edilir. Bu limitte, BBGKY hiyerarşisindeki denklemlerin sol tarafında bulunan çarpışma terimleri çıkarılır.

BBGKY hiyerarşisi,

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \frac{\vec{p}_n}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_n} - \sum_{n=1}^s \left(\frac{\partial U}{\partial \vec{q}_n} + \sum_l \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_l)}{\partial \vec{q}_n} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n} \right] f_s \\ = \sum_{n=1}^s \int dV_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_{s+1})}{\partial \vec{q}_n} \cdot \frac{\partial f_{s+1}}{\partial \vec{p}_n}, \end{aligned}$$

şu karakteristik zaman ölçeklerine sahiptir,

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau_U} \sim \frac{\partial U}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \sim \frac{v}{L}, \\ \frac{1}{\tau_c} \sim \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \sim \frac{v}{\lambda}, \\ \frac{1}{\tau_X} \sim \int dx \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \frac{f_{s+1}}{f_s} \sim \frac{1}{\tau_c} \cdot n\lambda^3, \end{cases}$$

burada $n\lambda^3$, etkileşim menzili λ içindeki parçacıkların sayısı, ve v tipik bir hızdır. Boltzmann denklemi, seyreltik limitte, $n\lambda^3 \ll 1$, $1/\tau_X \ll 1/\tau_c$ mertebesindeki terimleri göz ardı ederek elde edilir. Vlasov denklemi, yoğun limit $n\lambda^3 \gg 1$ 'de, $1/\tau_c \ll 1/\tau_X$ mertebesindeki terimleri yoksayarak elde edilir.

(a) N parçacık yoğunluğunun, tek parçacık yoğunluklarının çarpımı olduğunu varsayalım, yani, $\mathbf{x}_i \equiv (\vec{p}_i, \vec{q}_i)$ olmak üzere, $\rho = \prod_{i=1}^N \rho_1(\mathbf{x}_i, t)$. f_s yoğunluklarını ve normalleştirilmelerini hesaplayınız.

- Parçacık i 'nin koordinat ve momentumları $\mathbf{x}_i$ ile gösterilsin. Birleşik olasılık $\rho_N = \prod_{i=1}^N \rho_1(\mathbf{x}_i, t)$ 'den başlayarak, *bağımsız parçacıklar* için şunu buluruz

$$f_s = \frac{N!}{(N-s)!} \int \prod_{\alpha=s+1}^N dV_{\alpha} \rho_N = \frac{N!}{(N-s)!} \prod_{n=1}^s \rho_1(\mathbf{x}_n, t).$$

Normalleştirme için

$$\int d\Gamma \rho = 1, \quad \implies \quad \int dV_1 \rho_1(\mathbf{x}, t) = 1,$$

ve

$$\int \prod_{n=1}^s dV_n f_s = \frac{N!}{(N-s)!} \approx N^s \quad \text{for} \quad s \ll N.$$

(b) Çarpışma terimleri yok edildiğinde, BBGKY hiyerarşisindeki tüm denklemlerin şu tek denkleme eşdeğer olduğunu gösteriniz

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] f_1(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0,$$

burada

$$U_{\text{eff}}(\vec{q}, t) = U(\vec{q}) + \int d\mathbf{x}' \mathcal{V}(\vec{q} - \vec{q}') f_1(\mathbf{x}', t).$$

- Aşağıdaki ilişkiyi belirterek

$$\frac{f_{s+1}}{f_s} = \frac{(N-s)!}{(N-s-1)!} \rho_1(\mathbf{x}_{s+1}),$$

indirgenmiş BBGKY hiyerarşisi şöyledir

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \left(\frac{\vec{p}_n}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_n} - \frac{\partial U}{\partial \vec{q}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n} \right) \right] f_s \\
& \approx \sum_{n=1}^s \int dV_{s+1} \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_{s+1})}{\partial \vec{q}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n} [(N-s)f_s \rho_1(\mathbf{x}_{s+1})] \\
& \approx \sum_{n=1}^s \frac{\partial}{\partial \vec{q}_n} \left[\int dV_{s+1} \rho_1(\mathbf{x}_{s+1}) \mathcal{V}(\vec{q}_n - \vec{q}_{s+1}) \cdot N \right] \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n} f_s,
\end{aligned}$$

burada, $N \gg s$ için $(N-s) \approx N$ yaklaşıklığını kullandık. Yukarıdaki denklemi yeniden yazarsak,

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \sum_{n=1}^s \left(\frac{\vec{p}_n}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}_n} - \frac{\partial U_{eff}}{\partial \vec{q}_n} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}_n} \right) \right] f_s = 0,$$

burada

$$U_{eff} = U(\vec{q}) + N \int dV' \mathcal{V}(\vec{q} - \vec{q}') \rho_1(\mathbf{x}', t).$$

(c) Şimdi de N tane parçacığı V hacimli bir kutuya konmuş halde, ve başka bir potansiyel yokken düşünün. $f_1(\vec{q}, \vec{p}) = g(\vec{p})/V$ 'nin, *herhangi* bir $g(\vec{p})$ için Vlasov denkleminin durağan bir çözümü olduğunu gösteriniz. $g(\vec{p})$ için dengeye doğru gevşeme neden yoktur?

- Şuradan başlayarak

$$\rho_1 = g(\vec{p})/V,$$

şunu elde ederiz,

$$\mathcal{H}_{eff} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U_{eff}(\vec{q}_i) \right],$$

burada,

$$U_{eff} = 0 + N \int dV' \mathcal{V}(\vec{q} - \vec{q}') \frac{1}{V} g(\vec{p}) = \frac{N}{V} \int d^3q \mathcal{V}(\vec{q}).$$

(Normalleştirme koşulu $\int d^3p g(\vec{p}) = 1$ 'den yararlandık.) Vlasov denkleminde yerine koyarsak,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \right) \rho_1 = 0.$$

Dengeye doğru gevşeme yoktur çünkü $g(\vec{p})$ 'nin gevşemesini sağlayacak çarpışmalar bulunmaz. Her paçacığın momentumu $\mathcal{H}_{eff}$ tarafından korunur, yani $\{\rho_1, \mathcal{H}_{eff}\} = 0$ olması değişmesine izin vermez.

4. İki bileşenli plazma: $+e$ yüklü ve m_+ kütleli N tane iyon ile $-e$ yüklü ve m_- kütleli N tane elektronun, $V = N/n_0$ hacmi içinde nötr bir karışımını düşünün.

(a) Bu iki bileşenli sistem için Vlasov denklemlerinin aşağıdaki gibi olduğunu gösteriniz

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_+} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} + e \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] f_+(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0 \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_-} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - e \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] f_-(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0 \end{cases},$$

burada etkin Coulomb potansiyeli şöyle verilir,

$$\Phi_{\text{eff}}(\vec{q}, t) = \Phi_{\text{ext}}(\vec{q}) + e \int d\mathbf{x}' C(\vec{q} - \vec{q}') [f_+(\mathbf{x}', t) - f_-(\mathbf{x}', t)].$$

Yukarıda, Φ_{ext} dış yüklerce oluşturulan potansiyeldir, ve Coulomb potansiyeli $C(\vec{q})$ $\nabla^2 C = 4\pi\delta^3(\vec{q})$ diferansiyel denklemini sağlar.

• İki bileşenli karışımın Hamiltonyeni şöyledir

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{\vec{p}_i^2}{2m_+} + \frac{\vec{p}_i^2}{2m_-} \right] + \sum_{i,j=1}^{2N} e_i e_j \frac{1}{|\vec{q}_i - \vec{q}_j|} + \sum_{i=1}^{2N} e_i \Phi_{\text{ext}}(\vec{q}_i),$$

burada $C(\vec{q}_i - \vec{q}_j) = 1/|\vec{q}_i - \vec{q}_j|$ 'dir, sonuç olarak

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}_i} = e_i \frac{\partial \Phi_{\text{ext}}}{\partial \vec{q}_i} + e_i \sum_{j \neq i} e_j \frac{\partial}{\partial \vec{q}_i} C(\vec{q}_i - \vec{q}_j).$$

Bunu Vlasov denkleminde yerine koyduğumuzda,

$$\begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_+} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} + e \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] f_+(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0, \\ \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m_-} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} - e \frac{\partial \Phi_{\text{eff}}}{\partial \vec{q}} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \right] f_-(\vec{p}, \vec{q}, t) = 0. \end{cases}$$

(b) Tek parçacık yoğunluklarının $f_{\pm} = g_{\pm}(\vec{p})n_{\pm}(\vec{q})$ durağan biçimleri olduğunu varsayalım. Etkin potansiyelin şu denklemini sağladığını gösteriniz,

$$\nabla^2 \Phi_{\text{eff}} = 4\pi\rho_{\text{ext}} + 4\pi e (n_+(\vec{q}) - n_-(\vec{q})),$$

burada ρ_{ext} dış yük yoğunluğudur.

• $f_{\pm}(\vec{p}, \vec{q}) = g_{\pm}(\vec{p})n_{\pm}(\vec{q})$ alarak, ve $\int d^3p g_{\pm}(\vec{p}) = 1$ olduğunu kullanarak, etkin potansiyeldeki integraller şöyle basitleşir,

$$\Phi_{eff}(\vec{q}, t) = \Phi_{ext}(\vec{q}) + e \int d^3 q' C(\vec{q} - \vec{q}') [n_+(\vec{q}') - n_-(\vec{q}')].$$

∇^2 operatörünü yukarıdaki denkleme uygular, $\nabla^2 \Phi_{ext} = 4\pi\rho_{ext}$ ve $\nabla^2 C(\vec{q} - \vec{q}') = 4\pi\delta^3(\vec{q} - \vec{q}')$ olduğunu kullanırsak, şunu elde ederiz,

$$\nabla^2 \phi_{eff} = 4\pi\rho_{ext} + 4\pi e [n_+(\vec{q}) - n_-(\vec{q})].$$

(c) Yoğunlukların, denge Boltzmann ağırlıkları $n_{\pm}(\vec{q}) = n_0 \exp [\pm \beta e \Phi_{eff}(\vec{q})]$ 'ye gevşediklerini de varsaymak, şu öztutarlılık koşuluna yol açar,

$$\nabla^2 \Phi_{eff} = 4\pi [\rho_{ext} + n_0 e (e^{\beta e \Phi_{eff}} - e^{-\beta e \Phi_{eff}})],$$

ki bu, *Poisson-Boltzmann denklemi* olarak bilinir. Doğrusal olmayan biçimi yüzünden, genellikle Poisson-Boltzmann denklemini çözmek mümkün değildir. Üstel fonksiyonlar doğrusallaştırılarak, daha basit olan *Debye* denklemi elde edilir,

$$\nabla^2 \Phi_{eff} = 4\pi\rho_{ext} + \Phi_{eff}/\lambda^2.$$

Debye perdeleme uzunluğu λ 'nın ifadesini veriniz.

- Boltzmann ağırlıklarının doğrusallaştırılması şunu verir

$$n_{\pm} = n_0 \exp[\mp \beta e \Phi_{eff}(\vec{q})] \approx n_0 [1 \mp \beta e \Phi_{eff}],$$

sonuç olarak,

$$\nabla^2 \Phi_{eff} = 4\pi\rho_{ext} + \frac{1}{\lambda^2} \Phi_{eff},$$

burada perdeleme uzunluğu şöyle verilir

$$\lambda^2 = \frac{k_B T}{8\pi n_0 e^2}.$$

(d) Debye denkleminin şu genel çözümü olduğunu gösteriniz

$$\Phi_{eff}(\vec{q}) = \int d^3 \vec{q}' G(\vec{q} - \vec{q}') \rho_{ext}(\vec{q}'),$$

burada $G(\vec{q}) = \exp(-|\vec{q}|/\lambda)/|\vec{q}|$ perdelenmiş Coulomb potansiyelidir.

- Debye denkleminin şu genel çözümü olduğunu göstermek istiyoruz

$$\Phi_{eff}(\vec{q}) = \int d^3 \vec{q}' G(\vec{q} - \vec{q}') \rho_{ext}(\vec{q}'),$$

burada

$$G(\vec{q}) = \frac{\exp(-|q|/\lambda)}{|q|}.$$

Eşdeğer olarak göstermek istediğimiz şey $\vec{q} \neq 0$ için $\nabla^2 G = G/\lambda^2$. Küresel koordinatlarda $G = \exp(-r/\lambda)/r$. ∇^2 işlemini küresel koordinatlarda yaptığımızda sonuç,

$$\begin{aligned}\nabla^2 G &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \left[-\frac{1}{\lambda} \frac{e^{-r/\lambda}}{r} - \frac{e^{-r/\lambda}}{r^2} \right] \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\lambda^2} r e^{-r/\lambda} - \frac{1}{\lambda} e^{-r/\lambda} + \frac{1}{\lambda} e^{-r/\lambda} \right] = \frac{1}{\lambda^2} \frac{e^{-r/\lambda}}{r} = \frac{G}{\lambda^2}.\end{aligned}$$

(e) Vlasov yaklaşımının öztutarlılığı için koşulu veriniz ve parçacıklar arası mesafe cinsinden yorumlayınız.

- Vlasov denklemi $n_o \lambda^3 \gg 1$ limitini varsayar; bunun gereği olarak

$$\frac{(k_B T)^{3/2}}{n_o^{1/2} e^3} \gg 1, \quad \Rightarrow \quad \frac{e^2}{k_B T} \ll n_o^{-1/3} \sim \ell,$$

burada ℓ parçacıklar arasındaki mesafedir. Parçacıklar arası mesafenin cinsinden öztutarlılık koşulu şöyledir

$$\frac{e^2}{\ell} \ll k_B T,$$

yani, etkileşme enerjisi kinetik (termal) enerjiden çok daha küçüktür.

(f) Show that the characteristic relaxation time ($\tau \approx \lambda/c$) is temperature independent.

What property of the plasma is it related to?

- Karakteristik bir zaman şöyle elde edilir

$$\tau \sim \frac{\lambda}{c} \sim \sqrt{\frac{k_B T}{n_o e^2}} \cdot \sqrt{\frac{m}{k_B T}} \sim \sqrt{\frac{m}{n_o e^2}} \sim \frac{1}{\omega_p},$$

burada ω_p plazma frekansıdır..

5. Manyetik alanda iki boyutlu elektron gazı: Verici atomlar (P veya As gibi) bir yarıiletken (Si veya Ge gibi) eklendiğinde, bunların iletkenlik elektronları ana örgüde serbestçe hareket etmek üzere termal olarak uyarılabilirler. Farklı malzemelerin tabakalarını büyütürken, elektronları tabakalar arası sınırlara hapseden, konuma göre değişen bir potansiyel (iş fonksiyonu) oluşturmak mümkündür. Aşağıda, hapsedilmiş elektronları, *iki boyutta* klasik parçacıkların bir gazı olarak ele alacağız.

Eğer elektron tabakaları vericilerden yeterince ayrılmış iseler, saçılmanın ana kaynağı elektron-elektron çarpışmalarıdır.

(a) Bir manyetik alan altında, etkileşmeyen serbest elektronların Hamiltoniyeni şu biçimdedir

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{(\vec{p}_i - e\vec{A})^2}{2m} \pm \mu_B |\vec{B}| \right].$$

(Buradaki iki işaret lektron spinlerinin alana paralel veya antiparalel olmasına karşılık gelir.) Vektör potansiyel $\vec{A} = \vec{B} \times \vec{q}/2$ tekdüze bir manyetik alan $\vec{B}$ 'yi tanımlar. Klasik hareket denklemlerini elde ediniz, ve bunların elektronların, $\vec{B}$ 'ye dik bir düzlemde siklotron yörüngelerindeki dönüşünü tanımladıklarını gösteriniz.

• Bir manyetik alan altında, etkileşmeyen serbest elektronların Hamiltoniyeni şu biçimdedir

$$\mathcal{H} = \sum_i \left[\frac{(\vec{p}_i + e\vec{A})^2}{2m} \pm \mu_B |\vec{B}| \right],$$

ya da açılmış biçimde

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{m} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2m} \vec{A}^2 \pm \mu_B |\vec{B}|.$$

$\vec{A} = \vec{B} \times \vec{q}/2$ yerine konduğunda sonuç,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2m} \vec{p} \cdot \vec{B} \times \vec{q} + \frac{e^2}{8m} (\vec{B} \times \vec{q})^2 \pm \mu_B |\vec{B}| \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2m} \vec{p} \times \vec{B} \cdot \vec{q} + \frac{e^2}{8m} (B^2 q^2 - (\vec{B} \cdot \vec{q})^2) \pm \mu_B |\vec{B}|. \end{aligned}$$

Kanonik denklemleri, $\dot{\vec{q}} = \partial \mathcal{H} / \partial \vec{p}$ ve $\dot{\vec{p}} = -\partial \mathcal{H} / \partial \vec{q}$, kullanarak şunu buluruz

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{p}} = \frac{\vec{p}}{m} + \frac{e}{2m} \vec{B} \times \vec{q}, & \implies \vec{p} = m\dot{\vec{q}} - \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{q}, \\ \dot{\vec{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \vec{q}} = -\frac{e}{2m} \vec{p} \times \vec{B} - \frac{e^2}{4m} B^2 \vec{q} + \frac{e^2}{4m} (\vec{B} \cdot \vec{q}) \vec{B}. \end{cases}$$

$\vec{p}$ için elde edilmiş olan ilk denklemin türevini almak, ve onu $\dot{\vec{p}}$ için yukarıdaki ikinci ifadeye eşitlemek şunu verir

$$m\ddot{\vec{q}} - \frac{e}{2} \vec{B} \times \dot{\vec{q}} = -\frac{e}{2m} \left(m\dot{\vec{q}} - \frac{e}{2} \vec{B} \times \vec{q} \right) \times \vec{B} - \frac{e^2}{4m} |\vec{B}|^2 \vec{q} + \frac{e^2}{4m} (\vec{B} \cdot \vec{q}) \vec{B}.$$

Yukarıdaki ifadeyi, $\vec{B} \times \vec{q} \times \vec{B} = B^2 \vec{q} - (\vec{B} \cdot \vec{q}) \vec{B}$ ile sadeleştirmek şuna yol açar

$$m\ddot{\vec{q}} = e\vec{B} \times \dot{\vec{q}}.$$

Bu, elektronların siklotron yörüngelerindeki dönüşünü tanımlar,

$$\ddot{\vec{q}} = \vec{\omega}_c \times \dot{\vec{q}},$$

burada $\vec{\omega}_c = e\vec{B}/m$; yani dönüşler $\vec{B}$ 'ye dik düzlem üzerindedir.

(b) Yukarı ve aşağı spinli elektronların yoğunlukları $f_{\uparrow}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ ve $f_{\downarrow}(\vec{p}, \vec{q}, t)$ için Boltzmann denklemlerini, spin korunumlu çarpışmaların iki kesiti $\sigma \equiv \sigma_{\uparrow\uparrow} = \sigma_{\downarrow\downarrow}$, ve $\sigma_{\times} \equiv \sigma_{\uparrow\downarrow}$ cinsinden, sezgisel olarak (yani, adım adım bir türetimle değil) yazınız.

• $\sigma \equiv \sigma_{\uparrow\uparrow} = \sigma_{\downarrow\downarrow}$ ve $\sigma_{\times} \equiv \sigma_{\uparrow\downarrow}$ kesitleriyle tanımlanan çarpışmaların sınıflarını ele alalım. Yoğunluklar için Boltzmann denklemlerini şöyle yazabiliriz,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\uparrow}}{\partial t} - \{\mathcal{H}_{\uparrow}, f_{\uparrow}\} &= \int d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \left\{ \frac{d\sigma}{d\Omega} [f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\uparrow}(\vec{p}_2') - f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\uparrow}(\vec{p}_2)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2') - f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2)] \right\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\downarrow}}{\partial t} - \{\mathcal{H}_{\downarrow}, f_{\downarrow}\} &= \int d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \left\{ \frac{d\sigma}{d\Omega} [f_{\downarrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2') - f_{\downarrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2)] + \right. \\ &\quad \left. \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [f_{\downarrow}(\vec{p}_1') f_{\uparrow}(\vec{p}_2') - f_{\downarrow}(\vec{p}_1) f_{\uparrow}(\vec{p}_2)] \right\}. \end{aligned}$$

(c) $H = H_{\uparrow} + H_{\downarrow}$ ilgili H fonksiyonlarının toplamı olmak üzere, $dH/dt \leq 0$ olduğunu gösteriniz.

• Her zamanki Boltzmann H -Teoremi $dH/dt \leq 0$ olduğunu söyler, burada

$$H = \int d^2q d^2p f(\vec{q}, \vec{p}, t) \ln f(\vec{q}, \vec{p}, t).$$

Manyetik alan altındaki elektron gazı için, H fonksiyonu şöyle genelleştirilebilir

$$H = \int d^2q d^2p [f_{\uparrow} \ln f_{\uparrow} + f_{\downarrow} \ln f_{\downarrow}],$$

burada $dH/dt \leq 0$ koşulu şöyle ispatlanır:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int d^2q d^2p \left[\frac{\partial f_{\uparrow}}{\partial t} (\ln f_{\uparrow} + 1) + \frac{\partial f_{\downarrow}}{\partial t} (\ln f_{\downarrow} + 1) \right] \\ &= \int d^2q d^2p [(\ln f_{\uparrow} + 1) (\{f_{\uparrow}, \mathcal{H}_{\uparrow}\} + C_{\uparrow\uparrow} + C_{\uparrow\downarrow}) + (\ln f_{\downarrow} + 1) (\{f_{\downarrow}, \mathcal{H}_{\downarrow}\} + C_{\downarrow\downarrow} + C_{\downarrow\uparrow})], \end{aligned}$$

burada $C_{\uparrow\uparrow}$, vb., (b) şıkkındaki denklemlerin sağ tarafı yoluyla tanımlanmıştır. Böylece

$$\begin{aligned}
\frac{dH}{dt} &= \int d^2q d^2p (\ln f_{\uparrow} + 1) (C_{\uparrow\uparrow} + C_{\uparrow\downarrow}) + (\ln f_{\downarrow} + 1) (C_{\downarrow\downarrow} + C_{\downarrow\uparrow}) \\
&= \int d^2q d^2p (\ln f_{\uparrow} + 1) C_{\uparrow\uparrow} + (\ln f_{\downarrow} + 1) C_{\downarrow\downarrow} + (\ln f_{\uparrow} + 1) C_{\uparrow\downarrow} + (\ln f_{\downarrow} + 1) C_{\downarrow\uparrow} \\
&\equiv \frac{dH_{\uparrow\uparrow}}{dt} + \frac{dH_{\downarrow\downarrow}}{dt} + \frac{d}{dt} (H_{\uparrow\downarrow} + H_{\downarrow\uparrow}),
\end{aligned}$$

burada H 'ler çarpışma integrallerine benzemektedir. Ayrıca, $\int d^2p d^2q \{f_{\uparrow}, \mathcal{H}_{\uparrow}\} = \int d^2p d^2q \{f_{\downarrow}, \mathcal{H}_{\downarrow}\} = 0$ olduğu gerçeğini kullandık. Son denklemdeki terimlerin her birini ayrı ayrı ele aldığımızda,

$$\frac{dH_{\uparrow\uparrow}}{dt} = \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| (\ln f_{\uparrow} + 1) \frac{d\sigma}{d\Omega} [f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\uparrow}(\vec{p}_2') - f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\uparrow}(\vec{p}_2)].$$

Bu denklemi, ders notlarında yapıldığı gibi simetrik hale getirdikten sonra,

$$\begin{aligned}
\frac{dH_{\uparrow\uparrow}}{dt} &= -\frac{1}{4} \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \frac{d\sigma}{d\Omega} [\ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\uparrow}(\vec{p}_2) - \ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\uparrow}(\vec{p}_2')] \\
&\quad \cdot [f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\uparrow}(\vec{p}_2) - f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\uparrow}(\vec{p}_2')] \leq 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde, $dH_{\downarrow\downarrow}/dt \leq 0$. Geri kalan iki terimi aldığımızda

$$\begin{aligned}
\frac{dH_{\uparrow\downarrow}}{dt} &= \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| [\ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1) + 1] \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2') - f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2)] \\
&= \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| [\ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1') + 1] \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2) - f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2')],
\end{aligned}$$

burada, $(\vec{p}_1, \vec{p}_2 \leftrightarrow \vec{p}_1', \vec{p}_2')$ değiş tokuşunu yaptık. Bu iki ifadenin ortalamasını birlikte alırsak,

$$\begin{aligned}
\frac{dH_{\uparrow\downarrow}}{dt} &= -\frac{1}{2} \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [\ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1) - \ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1')] \\
&\quad \cdot [f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2) - f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2')].
\end{aligned}$$

Aynı şekilde,

$$\begin{aligned}
\frac{dH_{\downarrow\uparrow}}{dt} &= -\frac{1}{2} \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} [\ln f_{\downarrow}(\vec{p}_2) - \ln f_{\downarrow}(\vec{p}_2')] \\
&\quad \cdot [f_{\downarrow}(\vec{p}_2) f_{\uparrow}(\vec{p}_1) - f_{\downarrow}(\vec{p}_2') f_{\uparrow}(\vec{p}_1')].
\end{aligned}$$

Bu iki ifadeyi birleştirerek,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} (H_{\uparrow\downarrow} + H_{\downarrow\uparrow}) &= -\frac{1}{4} \int d^2q d^2p_1 d^2p_2 d\Omega |v_1 - v_2| \frac{d\sigma_{\times}}{d\Omega} \\
&\quad [\ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2) - \ln f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2')] [f_{\uparrow}(\vec{p}_1) f_{\downarrow}(\vec{p}_2) - f_{\uparrow}(\vec{p}_1') f_{\downarrow}(\vec{p}_2')] \leq 0.
\end{aligned}$$

Her bir katkı ayrı ayrı negatif olduğundan,

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dH_{\uparrow\uparrow}}{dt} + \frac{dH_{\downarrow\downarrow}}{dt} + \frac{d}{dt} (H_{\uparrow\downarrow} + H_{\downarrow\uparrow}) \leq 0.$$

(d) Çarpışmalarda korunumlu niceliklerin, *her konumda*, doğrusal bir kombinasyonu olan herhangi bir $\ln f$ için, $dH/dt = 0$ olduğunu gösteriniz.

- $dH/dt = 0$ olması için, önceki türetimdeki üç köşeli parantezin her birinin sıfır olmasına ihtiyacımız var. $dH_{\uparrow\downarrow}/dt$ ve $dH_{\downarrow\downarrow}/dt$ 'den gelen ilk iki katkı, ders notlarında tek parçacık için tartışılanlara benzer, ve çarpışmalarda korunumlu niceliklerin bir doğrusal kombinasyonu olan herhangi bir $\ln f$ için sıfıra gider.

$$\ln f_{\alpha} = \sum_i a_i^{\alpha}(\vec{q}) \chi_i(\vec{p}),$$

burada $\alpha = (\uparrow \text{ veya } \downarrow)$. Açıkça, her $\vec{q}$ konumunda, böyle bir f_{α} için,

$$\ln f_{\alpha}(\vec{p}_1) + \ln f_{\alpha}(\vec{p}_2) = \ln f_{\alpha}(\vec{p}_1') + \ln f_{\alpha}(\vec{p}_2').$$

Eğer $dH/dt = 0$ 'ın sadece ilk iki terimini ele alırsak, $a_i^{\alpha}(\vec{q})$ katsayıları $\vec{q}$ ve $\alpha = (\uparrow \text{ veya } \downarrow)$ 'nin her ikisiyle de değişebilir. Bu durum, üçüncü terim $d(H_{\uparrow\downarrow} + H_{\downarrow\uparrow})/dt$ 'yi ele aldığımızda değişir. Momentum ve kinetik enerji korunumları, ilgili dört fonksiyonun aynı olmasını zorlar, yani $a_i^{\uparrow}(\vec{q}) = a_i^{\downarrow}(\vec{q})$ olmasını gerektirir. Ancak, benzer bir zorlama, parçacık sayısı korunumundan gelen genel sabit için yoktur, çünkü spin-yukarı ve spin-aşağı parçacıkların sayıları *ayrı ayrı* korunur, yani $a_0^{\uparrow}(\vec{q}) = a_0^{\downarrow}(\vec{q})$. Bu, iki sistem aynı hız ve sıcaklığı paylaşırsalar da, yukarı ve aşağı spinlerin yoğunluklarının, nihai dengede farklı olabileceği anlamına gelir.

(e) Boltzmann denkleminde akan terimlerin, sadece bir parçacık Hamiltonyenlerince korunan niceliklere bağlı olan, herhangi bir fonksiyon için sıfır olduğunu gösteriniz.

- Boltzmann denklemi şöyledir

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} = -\{f_{\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha}\} + C_{\alpha\alpha} + C_{\alpha\beta},$$

burada sağ taraf, akan terimler $\{f_{\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha}\}$, ve çarpışma terimleri C 'lerden oluşur. I_i tek parçacık Hamiltonyenince korunan herhangi bir niceliği gösterebilir, yani $\{I_i, \mathcal{H}_{\alpha}\} = 0$. Sadece I_i 'lerin bir fonksiyonu olan f_{α} 'yı ele alalım,

$$f_{\alpha} \equiv f_{\alpha}(I_1, I_2, \dots).$$

Sonrasında,

$$\{f_{\alpha}, \mathcal{H}_{\alpha}\} = \sum_j \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial I_j} \{I_j, \mathcal{H}_{\alpha}\} = 0.$$

(f) Açısal momentum $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}$ 'nin, çarpışmalar sırasında ve sonrasında korunduğunu gösteriniz.

- $\vec{q}$ 'daki bir çarpışma için momentumun korunumu

$$(\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = (\vec{p}_1' + \vec{p}_2'),$$

şunu gerektirir

$$\vec{q} \times (\vec{p}_1 + \vec{p}_2) = \vec{q} \times (\vec{p}_1' + \vec{p}_2'),$$

veya

$$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2',$$

burada $\vec{L} = \vec{q} \times \vec{p}_i$ 'yi kullandık. Bundan dolayı açısal momentum $\vec{L}$ çarpışmalar sırasında korunur. Bu problemde çalışılan elektron gazında olduğu gibi, 2 boyutta hareket eden, $\vec{q} \equiv (x_1, x_2)$, elektronlar için, sadece z -bileşeni L_z 'nin bulunduğunu hatırlayınız. (a) şıkında tartışılan Hamiltonyeni ele alalım,

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{e}{2m} \vec{p} \times \vec{B} \cdot \vec{q} + \frac{e^2}{8m} (B^2 q^2 - (\vec{B} \cdot \vec{q})^2) \pm \mu_B |\vec{B}|.$$

Her bir terimin $L_z = \vec{q} \times \vec{p}|_z$ ile Poisson parantezini hesaplayalım. İlk terim şöyledir

$$\{|\vec{p}|^2, \vec{q} \times \vec{p}\} = \varepsilon_{ijk} \{p_i p_j, x_j p_k\} = \varepsilon_{ijk} 2p_i \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j p_k) = 2\varepsilon_{ilk} p_l p_k = 0,$$

burada $\varepsilon_{ijk} p_j p_k = 0$ olduğunu kullandık, çünkü $p_j p_k = p_k p_j$ simetriktir. İkinci terim L_z ile orantılıdır,

$$\{\vec{p} \times \vec{B} \cdot \vec{q}, L_z\} = \{B_z L_z, L_z\} = 0.$$

Son terimler q^2 ile orantılıdır ve $\{p^2, \vec{q} \times \vec{p}\} = 0$ oluşuyla aynı sebepten dolayı $\{q^2, \vec{q} \times \vec{p}\} = 0$ olur ve şu sonuca götürür

$$\{\mathcal{H}, \vec{q} \times \vec{p}\} = 0.$$

Bundan dolayı, açısal momentum, çarpışmalardan sonra da korunur.

(g) Dairesel simetrisi olan bir potansiyelle sınırlanmış parçacıkların denge dağılım fonksiyonları için en genel biçimi yazınız.

- Denge dağılım fonksiyonlarının en genel biçimi, hem çarpışma terimlerini hem de akan terimleri sıfır yapmalıdır. Dolayısıyla, önceki şıkların sonuçlarına dayanarak şunu elde ederiz

$$f_\alpha = A_\alpha \exp[-\beta \mathcal{H}_\alpha - \gamma L_z].$$

Çarpışma terimleri, bir ortalama hıza karşılık gelen, üstel fonksiyonda bir $-\vec{u} \cdot \vec{p}$ teriminin olasılığına izin verir. Böyle bir terim, durağan bir kutunun oluşturduğu potansiyelle sıradeğiştirmez, ve dolayısıyla akan terimlerce kabul edilmez. Ancak, açısal momentum dairesel bir potansiyelle sıradeğiştir, $\{V(\vec{q}), L\} = 0$, ve akan terimlerce kabul edilir. Sıfırdan farklı bir γ dairesel bir kutuda dönen elektron gazını tanımlar.

(h) Manyetik ve manyetik olmayan safsızlıklardan kaynaklanan saçılmaların dahil edilmesiyle (g) şıkkındaki sonuç nasıl değişir?

- Çarpışmalarda herhangi bir safsızlıktan saçılma, $\vec{p}$ 'nin ve dolayısıyla $\vec{L}$ 'nin korunumunu bozar. γ terimine artık ihtiyaç duyulmayacaktır. Manyetik safsızlıklardan saçılma, yukarı ve aşağı spinlerin nüfuslarını karıştırarak $A_{\uparrow} = A_{\downarrow}$ olmasını gerektirir; manyetik olmayan safsızlıkların bu etkisi yoktur.

(i) Spin ve açısal momentum korunumları yeni hidrodinamik denklemlerine yol açar mı?

- Açısal momentumun korunumu, (f) şıkkında gösterildiği gibi $\vec{p}$ 'nin korunumuyla ilişkilidir, ve bundan dolayı yeni bir denkleme yol açmaz. Tersine, spinin korunumu, $(n_{\uparrow} - n_{\downarrow})$ ile orantılı mıknatıslanmayı içeren ek bir hidrodinamik denkleme yol açar.

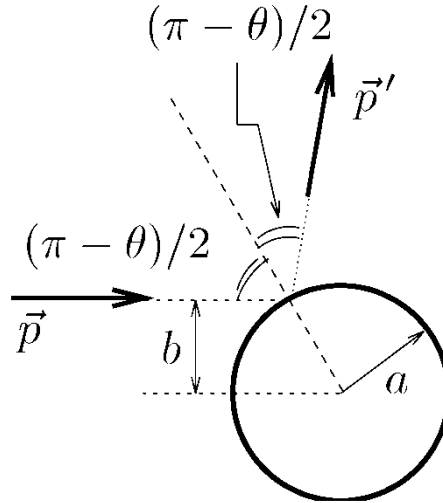
6. Lorentz gazı, sabit bir dizi saçıcı ile çarpışan etkileşmeyen parçacıkları tanımlar. Bu, elektronların verici safsızlıklardan saçılması için iyi bir modeldir. a yarıçaplı sert daireler olan sabit safsızlıkları, iki boyutlu tekdüze bir yoğunluk n_0 'da ele alınız.

(a) Sert bir dairenin, bir θ açısı ile saçılımın diferansiyel kesitinin şöyle olduğunu gösteriniz:

$$d\sigma = \frac{a}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta,$$

ve toplam kesiti hesaplayınız.

- b , $\vec{p}'$ ve $\vec{p}$ arasındaki θ açısıyla ilişkili olan (bkz. şekil), etki parametresini ifade etsin.



$$b(\theta) = a \sin \frac{\pi - \theta}{2} = a \cos \frac{\theta}{2}.$$

Diferansiyel kesit şimdi şu şekilde verilir:

$$d\sigma = 2|db| = a \sin \frac{\theta}{2} d\theta.$$

Dolayısıyla toplam kesit:

$$\sigma_{tot} = \int_0^\pi d\theta a \sin \frac{\theta}{2} = 2a \left[-\cos \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 2a.$$

(b) Lorentz gazının bir parçacık yoğunluğu $f(\vec{q}, \vec{p}, t)$ için Boltzmann denklemini yazınız (sadece sabit safsızlıklarla çarpışmaları dahil ederek). (*Elektron spinini yoksayınız.*)

- İlgili Boltzmann denklemi şöyledir:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} + \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} \\ = \int d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{|\vec{p}|}{m} n_0 [-f(\vec{p}) + f(\vec{p}')] = \frac{n_0 |\vec{p}|}{m} \int d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} [f(\vec{p}') - f(\vec{p})] \equiv C[f(\vec{p})]. \end{aligned}$$

(c) $\vec{F} \equiv -\partial U / \partial \vec{q}$ tanımını, ve aşağıdakileri kullanarak,

$$n(\vec{q}, t) = \int d^2 \vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad \text{ve} \quad \langle g(\vec{q}, t) \rangle = \frac{1}{n(\vec{q}, t)} \int d^2 \vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}, t) g(\vec{q}, t),$$

herhangi bir $\chi(|\vec{p}|)$ fonksiyonu için, elimizde aşağıdaki bağıntı olduğunu gösteriniz,

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \chi \rangle) + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left(n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \chi \right\rangle \right) = \vec{F} \cdot \left(n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial \vec{p}} \right\rangle \right).$$

- $\vec{F} \equiv -\partial U / \partial \vec{q}$ ve aşağıdaki tanımları kullanarak,

$$n(\vec{q}, t) = \int d^2\vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}, t), \quad \text{ve} \quad \langle g(\vec{q}, t) \rangle = \frac{1}{n(\vec{q}, t)} \int d^2\vec{p} f(\vec{q}, \vec{p}, t) g(\vec{q}, t),$$

şöyle yazabiliriz,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (n \langle \chi(|\vec{p}|) \rangle) &= \int d^2\vec{p} \chi(|\vec{p}|) \left[-\frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{q}} - \vec{F} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \int d\theta \frac{d\sigma}{d\theta} \frac{|\vec{p}|}{m} n_o(f(\vec{p}) - f(\vec{p}')) \right] \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left(n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \chi \right\rangle \right) + \vec{F} \cdot \left(n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial \vec{p}} \right\rangle \right). \end{aligned}$$

Bu son ifadenin yeniden yazılması hidrodinamik denklemi verir.

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \chi \rangle) + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left(n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \chi \right\rangle \right) = \vec{F} \cdot \left(n \left\langle \frac{\partial \chi}{\partial \vec{p}} \right\rangle \right).$$

(d) Yerel hız $\vec{u} \equiv \langle \vec{p}/m \rangle$ cinsinden yerel yoğunluk $\rho \equiv mn(\vec{q}, t)$ için korunum denklemini türetiniz.

- Yukarıdaki ifadede $\chi = 1$ kullanarak

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left(n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle \right) = 0.$$

Yerel yoğunluk $\rho = mn$, ve hız $\vec{u} \equiv \langle \vec{p}/m \rangle$, cinsinden elimizde,

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0.$$

(e) Parçacık momentumunun büyüklüğü safsızlık saçılması ile değişmediğinden, Lorentz gazının sonsuz sayıda korunumlu niceliği, $|\vec{p}|^m$, vardır. Bu gerçekçi olmayan özellik, parçacık-parçacık çarpışmalarının dahil edilmesiyle ortadan kalkar. Bu sorunun geri kalanı için korunumlu bir nicelik olarak sadece $p^2/2m$ 'e odaklanınız. Aşağıdaki enerji yoğunluğu için korunum denklemini,

$$\epsilon(\vec{q}, t) \equiv \frac{\rho}{2} \langle c^2 \rangle, \quad \text{burada} \quad \vec{c} \equiv \frac{\vec{p}}{m} - \vec{u},$$

enerji akısı $\vec{h} \equiv \rho \langle \vec{c} c^2 \rangle / 2$ ve basınç tensörü $P_{\alpha\beta} \equiv \rho \langle c_\alpha c_\beta \rangle$ cinsinden türetiniz.

- Bir korunumlu nicelik olarak kinetik enerji $\chi = p^2/2m$ ile, (c) şıkkında bulunan denklem şunu verir

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{n}{2m} \langle |\vec{p}|^2 \rangle \right) + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left(\frac{n}{2} \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \frac{p^2}{m} \right\rangle \right) = \vec{F} \cdot \left(n \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle \right).$$

$\langle \vec{c} \rangle = 0$ olmak üzere, $\vec{p}/m = \vec{u} + \vec{c}$ 'yi yerine koyarak, ve $\rho = nm$ 'yi kullanarak,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \frac{\rho}{2} \langle c^2 \rangle \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left[\frac{\rho}{2} \langle (\vec{u} + \vec{c})(u^2 + c^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{c}) \rangle \right] = \frac{\rho}{m} \vec{F} \cdot \vec{u}.$$

$\epsilon = \rho \langle c^2 \rangle / 2$ tanımından, elimizde

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \varepsilon \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left[\frac{\rho}{2} (\vec{u} u^2 + \vec{u} \langle c^2 \rangle + \langle \vec{c} c^2 \rangle + 2\vec{u} \cdot \langle \vec{c} \vec{c} \rangle) \right] = \frac{\rho}{m} \vec{F} \cdot \vec{u}.$$

Son olarak, $\vec{h} \equiv \rho \langle \vec{c} c^2 \rangle / 2$ ve $P_{\alpha\beta} = \rho \langle c_\alpha c_\beta \rangle$ 'yi yerine koyarak, şunu buluruz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \varepsilon \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left[\vec{u} \left(\frac{\rho}{2} u^2 + \varepsilon \right) + \vec{h} \right] + \frac{\partial}{\partial q_\alpha} (u_\beta P_{\alpha\beta}) = \frac{\rho}{m} \vec{F} \cdot \vec{u}.$$

(f) Aşağıdaki yerel denge koşullarını yansıtan bir tek parçacık yoğunluğu ile başlayarak

$$f^0(\vec{p}, \vec{q}, t) = n(\vec{q}, t) \exp \left[-\frac{p^2}{2mk_B T(\vec{q}, t)} \right] \frac{1}{2\pi mk_B T(\vec{q}, t)},$$

$\vec{u}$, $\vec{h}$, ve $P_{\alpha\beta}$ 'yi hesaplayınız. Böylece, sıfırıncı derece hidrodinamik denklemlerini elde ediniz.

• Çarpışmalarda korunumlu yalnızca iki nicelik, 1 ve $p^2/2m$ vardır. Şu tek parçacık yoğunluğu ile başlayalım

$$f^0(\vec{p}, \vec{q}, t) = n(\vec{q}, t) \exp \left[-\frac{p^2}{2mk_B T(\vec{q}, t)} \right] \frac{1}{2\pi mk_B T(\vec{q}, t)}.$$

Bu durumda,

$$\vec{u} = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \right\rangle_0 = 0, \quad \text{ve} \quad \vec{h} = \left\langle \frac{\vec{p}}{m} \frac{p^2}{m} \right\rangle_0 \frac{\rho}{2} = 0,$$

çünkü her ikisi de $\vec{p}$ 'nin tek fonksiyonları, f^0 ise $\vec{p}$ 'nin bir çift fonksiyondur, ayrıca

$$P_{\alpha\beta} = \rho \langle c_\alpha c_\beta \rangle = \frac{n}{m} \langle p_\alpha p_\beta \rangle = \frac{n}{m} \delta_{\alpha\beta} \cdot mk_B T = nk_B T \delta_{\alpha\beta}.$$

Bu ifadeleri (c) ve (d)'nin sonuçlarında yerine koyarak, sıfırıncı derece hidrodinamik denklemlerini elde ederiz,

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\rho}{2} \langle c^2 \rangle = 0. \end{cases}$$

Yukarıdaki denklemler ρ ve ε 'un zamandan bağımsız olmasını gerektirir, yani

$$\rho = n(\vec{q}), \quad \text{ve} \quad \varepsilon = k_B T(\vec{q}),$$

veya

$$f^0 = \frac{n(\vec{q})}{2\pi mk_B T(\vec{q})} \exp \left[-\frac{p^2}{2mk_B T(\vec{q})} \right].$$

(g) Boltzmann denklemindeki çarpışma terimine tek çarpışma zamanı yaklaşımıyla, birinci derece çözümün aşağıdaki olduğunu gösteriniz

$$f^1(\vec{p}, \vec{q}, t) = f^0(\vec{p}, \vec{q}, t) \left[1 - \tau \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial \ln T}{\partial \vec{q}} + \frac{p^2}{2mk_B T^2} \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} - \frac{\vec{F}}{k_B T} \right) \right].$$

- Tek çarpışma zamanı yaklaşımı:

$$C[f] = \frac{f^0 - f}{\tau}.$$

Boltzmann denkleminin birinci derece çözümü,

$$f = f^0 (1 + g),$$

şuradan

$$\mathcal{L}[f^0] = -\frac{f^0 g}{\tau},$$

şöyle elde edilir:

$$g = -\tau \frac{1}{f^0} \mathcal{L}[f^0] = -\tau \left[\frac{\partial}{\partial t} \ln f^0 + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \ln f^0 + \vec{F} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \ln f^0 \right].$$

Aşağıdaki eşitlik hatırlanırsa

$$\ln f^0 = -\frac{p^2}{2mk_B T} + \ln n - \ln T - \ln(2\pi mk_B),$$

burada n ve T t 'den bağımsızdır, elimizde $\partial \ln f^0 / \partial t = 0$, ve

$$\begin{aligned} g &= -\tau \left\{ \vec{F} \cdot \left(\frac{-\vec{p}}{mk_B T} \right) + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left[\frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \vec{q}} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{p^2}{2mk_B T^2} \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} \right] \right\} \\ &= -\tau \left\{ \frac{\vec{p}}{m} \cdot \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial \vec{q}} - \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} + \frac{p^2}{2mk_B T^2} \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} - \frac{\vec{F}}{k_B T} \right) \right\}. \end{aligned}$$

(h) Show that using the first order expression for f , we obtain (f için birinci derece ifadeyi kullanarak şunu elde ettiğimizi gösteriniz:

$$\rho \vec{u} = n\tau \left[\vec{F} - k_B T \nabla \ln(\rho T) \right].$$

- Açıkça $\int d^2 q f^0 (1 + g) = \int d^2 q f^0 = n$, ve

$$\begin{aligned} u_\alpha &= \left\langle \frac{p_\alpha}{m} \right\rangle = \frac{1}{n} \int d^2 p \frac{p_\alpha}{m} f^0 (1 + g) \\ &= \frac{1}{n} \int d^2 p \frac{p_\alpha}{m} \left[-\tau \frac{p_\beta}{m} \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial q_\beta} - \frac{\partial \ln T}{\partial q_\beta} - \frac{F_\beta}{k_B T} + \frac{p^2}{2mk_B T^2} \frac{\partial T}{\partial q_\beta} \right) \right] f^0. \end{aligned}$$

Wick teoremi aşağıdakini kontrol etmek için kullanılabilir:

$$\begin{aligned}\langle p_\alpha p_\beta \rangle_0 &= \delta_{\alpha\beta} m k_B T, \\ \langle p^2 p_\alpha p_\beta \rangle_0 &= (m k_B T)^2 [2\delta_{\alpha\beta} + 2\delta_{\alpha\beta}] = 4\delta_{\alpha\beta} (m k_B T)^2,\end{aligned}$$

sonuç olarak,

$$u_\alpha = -\frac{n\tau}{\rho} \left[\delta_{\alpha\beta} k_B T \left(\frac{\partial}{\partial q_\beta} \ln \left(\frac{\rho}{T} \right) - \frac{1}{k_B T} F_\beta \right) + 2k_B \frac{\partial T}{\partial q_\beta} \delta_{\alpha\beta} \right].$$

Bu terimlerin yeniden düzenlenmesiyle aşağıdaki elde edilir:

$$\rho u_\alpha = n\tau \left[F_\alpha - k_B T \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \ln(\rho T) \right].$$

(i) Yukarıdaki denklemden, hız tepki fonksiyonu $\chi_{\alpha\beta} = \partial u_\alpha / \partial F_\beta$ 'yi hesaplayınız.

- Hız tepki fonksiyonunu şu şekilde kolayca hesaplanır:

$$\chi_{\alpha\beta} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial F_\beta} = \frac{n\tau}{\rho} \delta_{\alpha\beta}.$$

(j) $P_{\alpha\beta}$, ve $\vec{h}$ 'yi hesaplayınız ve böylece birinci derece hidrodinamik denklemleri yazınız.

- Basınç tensörü ve ısı akısı için birinci derece ifadeler şunlardır:

$$\begin{aligned}P_{\alpha\beta} &= \frac{\rho}{m^2} \langle p_\alpha p_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} n k_B T, \quad \text{and} \quad \delta^1 P_{\alpha\beta} = 0, \\ h_\alpha &= \frac{\rho}{2m^3} \langle p_\alpha p^2 \rangle = -\frac{\tau\rho}{2m^3} \left\langle p_\alpha p^2 \frac{p_i}{m} (a_i + b_i p^2) \right\rangle_0.\end{aligned}$$

İkincisi Wick teoremi sonuçlarından,

$$\begin{aligned}\langle p_i p_\alpha p^2 \rangle &= 4\delta_{\alpha i} (m k_B T)^2, \quad \text{ve} \\ \langle p_i p_\alpha p^2 p^2 \rangle &= (m k_B T)^3 [\delta_{\alpha i} (4 + 2) + 4 \times 2\delta_{\alpha i} + 4 \times 2\delta_{\alpha i}] = 22\delta_{\alpha i},\end{aligned}$$

şöyle hesaplanır,

$$\begin{aligned}h_\alpha &= -\frac{\rho\tau}{2m^3} \left[(m k_B T)^2 \left(\frac{\partial}{\partial q_\alpha} \ln \frac{\rho}{T} - \vec{F} \right) + \frac{22(m k_B T)^3}{2m k_B T} \frac{\partial}{\partial q_\alpha} \ln T \right] \\ &= -11n k_B^2 T \tau \frac{\partial T}{\partial q_\alpha}.\end{aligned}$$

(e) şıkkında elde edilen denklemde $P_{\alpha\beta}$ ve h_α 'nin ifadelerini yerine koyunuz

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \epsilon \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} \cdot \left[\vec{u} \left(\frac{\rho}{2} u^2 + \epsilon \right) - 11n k_B^2 T \tau \frac{\partial T}{\partial \vec{q}} \right] + \frac{\partial}{\partial \vec{q}} (\vec{u} n k_B T) = \frac{\rho}{m} \vec{F} \cdot \vec{u}.$$

7. Termal iletkenlik: Bir w mesafesi ile ayrılmış iki tabaka arasında bir klasik gaz düşünün. Bir tabaka $y = 0$ 'da T_1 sıcaklığında tutulurken, diğer tabaka $y = w$ 'da farklı bir T_2 sıcaklıktadır. Gaz hızı sıfırdır, böylece bir parçacık yoğunluğuna ilk sıfırinci yaklaşım şöyledir,

$$f_1^0(\vec{p}, x, y, z) = \frac{n(y)}{[2\pi m k_B T(y)]^{3/2}} \exp \left[-\frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m k_B T(y)} \right].$$

(a) Gaz hızı $\vec{u}$ 'nın sıfır kalmasını sağlamak için $n(y)$ ve $T(y)$ arasındaki gerekli ilişki nedir? (Bu sorunun kalanında $n(y)$ ve $T(y)$ arasındaki bu ilişkiyi kullanınız.)

- Tabakalar arasındaki gaz üzerinde etkili bir dış kuvvet olmadığı için, basınç değişimleri olduğunda, gaz yalnızca yerel akabilir. Yerel basınç $P(y) = n(y)k_B T(y)$ olduğundan, sabit olacak sıvı için durum;

$$n(y)T(y) = \text{sabit}.$$

(b) Wick teoremini kullanarak veya kulanmadan gösteriniz ki;

$$\langle p^2 \rangle^0 \equiv \langle p_\alpha p_\alpha \rangle^0 = 3 (m k_B T), \quad \text{ve} \quad \langle p^4 \rangle^0 \equiv \langle p_\alpha p_\alpha p_\beta p_\beta \rangle^0 = 15 (m k_B T)^2,$$

burada $\langle \mathcal{O} \rangle^0$, Gaussiyen ağırlığı f_1^0 ile alınmış yerel ortalamaları belirtir. Simetri argümanları ile birlikte $\langle p^6 \rangle^0 = 105 (m k_B T)^3$ sonucunu kullanarak şu sonuca varınız,

$$\langle p_y^2 p^4 \rangle^0 = 35 (m k_B T)^3.$$

- Gaussiyen ağırlığı $\langle p_\alpha p_\beta \rangle^0 = \delta_{\alpha\beta} (m k_B T)$ kovaryansına sahiptir. Wick teoremi kullanıldığında şunu elde ederiz:

$$\langle p^2 \rangle^0 = \langle p_\alpha p_\alpha \rangle^0 = (m k_B T) \delta_{\alpha\alpha} = 3 (m k_B T).$$

Benzer şekilde,

$$\langle p^4 \rangle^0 = \langle p_\alpha p_\alpha p_\beta p_\beta \rangle^0 = (m k_B T)^2 (\delta_{\alpha\alpha} + 2\delta_{\alpha\beta}\delta_{\alpha\beta}) = 15 (m k_B T)^2.$$

Üç yön boyunca simetri şunu gerektirir:

$$\langle p_x^2 p^4 \rangle^0 = \langle p_y^2 p^4 \rangle^0 = \langle p_z^2 p^4 \rangle^0 = \frac{1}{3} \langle p^2 p^4 \rangle^0 = \frac{1}{3} \times 105 (m k_B T)^3 = 35 (m k_B T)^3.$$

(c) Sıfırinci derece yaklaşım, (a) şıkkındaki gibi ilişkili olan sıcaklık/yoğunluk değişimlerinin gevşemesine yol açmaz. Tek bir çarpışma zamanı yaklaşımı içinde, Boltzmann denklemini doğrusallaştırarak, $f_1^1(\vec{p}, y)$ 'e daha iyi bir (zamandan bağımsız) yaklaşım bulunuz,

$$\mathcal{L}[f_1^1] \approx \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_y}{m} \frac{\partial}{\partial y} \right] f_1^0 \approx -\frac{f_1^1 - f_1^0}{\tau_K},$$

burada τ_K çarpışmalar arasındaki ortalama zaman mertebesindedir.

- Sadece y 'ye göre değişimler olduğundan, şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \frac{p_y}{m} \frac{\partial}{\partial y} \right] f_1^0 &= f_1^0 \frac{p_y}{m} \frac{\partial}{\partial y} \ln f_1^0 = f_1^0 \frac{p_y}{m} \frac{\partial}{\partial y} \left[\ln n - \frac{3}{2} \ln T - \frac{p^2}{2mk_B T} - \frac{3}{2} \ln(2\pi mk_B) \right] \\ &= f_1^0 \frac{p_y}{m} \left[\frac{\partial_y n}{n} - \frac{3}{2} \frac{\partial_y T}{T} + \frac{p^2}{2mk_B T} \frac{\partial T}{T} \right] = f_1^0 \frac{p_y}{m} \left[-\frac{5}{2} + \frac{p^2}{2mk_B T} \right] \frac{\partial_y T}{T}, \end{aligned}$$

burada, son eşitlikte $\partial_y n/n = -\partial_y T/T$ 'i elde etmek için $nT = \text{sabit}$ olarak kullandık.

Dolayısıyla birinci derece sonuç şudur:

$$f_1^1(\vec{p}, y) = f_1^0(\vec{p}, y) \left[1 - \tau_K \frac{p_y}{m} \left(\frac{p^2}{2mk_B T} - \frac{5}{2} \right) \frac{\partial_y T}{T} \right].$$

(d) (b) şıkında elde edilen ortalamalar ile birlikte, ısı transferi vektörünün y bileşeni h_y 'yi hesaplamak için f_1^1 'i kullanınız, ve dolayısıyla termal iletkenlik katsayısı K 'yı bulunuz.

- $\vec{u}$ hızı sıfır olduğundan, ısı transfer vektörü şudur:

$$h_y = n \left\langle c_y \frac{mc^2}{2} \right\rangle^1 = \frac{n}{2m^2} \langle p_y p^2 \rangle^1.$$

Sıfırıncı derece Gaussiyen ağırlıklarında p 'nin tüm tek momentleri sıfır ortalamaya sahiptir. Ancak f_1^1 'deki düzeltmeler, sıfır olmayan bir ısı transferi sağlar,

$$h_y = -\tau_K \frac{n}{2m^2} \frac{\partial_y T}{T} \left\langle \frac{p_y}{m} \left(\frac{p^2}{2mk_B T} - \frac{5}{2} \right) p_y p^2 \right\rangle^0.$$

$\langle p_y^2 p^4 \rangle^0$ ve $\langle p_y^2 p^2 \rangle^0$ Gaussiyen ortalamalarına ihtiyacımız olduğunu unutmayınız. (b) şıkındaki sonuçlardan, bu ortalamalar $35(mk_B T)^3$ ve $5(mk_B T)^2$ 'e eşittir. Dolayısıyla,

$$h_y = -\tau_K \frac{n}{2m^3} \frac{\partial_y T}{T} (mk_B T)^2 \left(\frac{35}{2} - \frac{5 \times 5}{2} \right) = -\frac{5}{2} \frac{n \tau_K k_B^2 T}{m} \partial_y T.$$

Termal iletkenlik katsayısı, aktarılan ısıyı, sıcaklık değişimi $\vec{h} = -K \nabla T$ ile ilişkilendirir, ve dolayısıyla şunu belirleyebiliriz:

$$K = \frac{5}{2} \frac{n \tau_K k_B^2 T}{m}.$$

(e) Gazın kararlı durumdaki sıcaklık profili, $T(y)$ nedir?

- $\partial_t T$, $-\partial_y h_y$ ile orantılı olduğundan, h_y bir sabitken, zamana göre değişim hiç olmayacaktır. Ama, $K \propto T$ çarpımıyla orantılı olmak üzere, incelediğimiz durumda, $h_y = -K \partial_y T$ sabittir. Bundan dolayı $\partial_y T$ sabit olmalıdır, ve $T(y)$ iki tabaka arasında doğrusal olarak değişir. $T(0) = T_1$ ve $T(w) = T_2$ sınır koşulları ile sonuç şöyledir,

$$T(y) = T_1 + \frac{T_2 - T_1}{w} y.$$
