

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için

<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr>

sitesini ziyaret ediniz.

### Değerlendirme Problemleri

Birinci sınıf içi sınav **26/09/07** Çarşamba günü, **14:30 – 16:00** arası yapılacaktır. **21/09/07** Cuma günü sınav değerlendirmesiyle uygulama saati olacaktır.

Sınav kapalı kitaptır, ama isterseniz tek sayfa formül kağıdı getirebilirsiniz. Sınav tamamen aşağıdaki problemlerin bir altkümesinden oluşacaktır. Dolayısıyla, bu problemlerle tanışık ve rahatsanız, sürprizlere yer olmayacaktır!

\*\*\*\*\*

Aşağıdaki bilgileri yararlı bulabilirsiniz:

### Fiziksel Sabitler

Elektron kütlesi	$m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} kg$	Proton kütlesi	$m_p \approx 1.7 \times 10^{-27} kg$
Elektron Yüğü	$e \approx 1.6 \times 10^{-19} C$	Planck sab./ $2\pi$	$\hbar \approx 1.1 \times 10^{-34} J s^{-1}$
Işık Hızı	$c \approx 3.0 \times 10^8 m s^{-1}$	Stefan sabiti	$\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} W m^{-2} K^{-4}$
Boltzmann sabiti	$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} J K^{-1}$	Avogadro sayısı	$N_0 \approx 6.0 \times 10^{23} mol^{-1}$

### Çevrim Çarpanları

$$1 atm \equiv 1.0 \times 10^5 N m^{-2} \quad 1 \text{Å} \equiv 10^{-10} m \quad 1 eV \equiv 1.1 \times 10^4 K$$

### Termodinamik

$$dE = TdS + dW \quad \text{Gaz için: } dW = -PdV \quad \text{Tel için: } dW = Jdx$$

### Matematiksel Formüller

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}} \quad \left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx \exp\left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right] \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \ln N! = N \ln N - N$$

$$\langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle \quad \ln \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$$

$$\cosh(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \quad \sinh(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots$$

$$d \text{ boyutta birim kürenin yüzey alanı} \quad S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{(d/2-1)!}$$

**1. Yüzey gerilimi:** İki faz arasındaki arayüzlerin termodinamik özellikleri, yüzey gerilimi  $S$  olarak adlandırılan durum fonksiyonu tarafından belirtilir. Yüzey gerilimi, yüzey alanını  $dW = SdA$  formülünde  $dA$  kadar arttırmak için gerekli olan iş cinsinden tanımlanır.

(a) Yarıçapın sonsuzküçük değişimiyle yüzey gerilimine karşı yapılan işi düşünerek,  $R$  yarıçaplı küre şeklindeki bir su damlasının içindeki basıncın, dış basınçtan  $2S/R$  kadar büyük olduğunu gösteriniz.  $R$  yarıçaplı sabun köpüğünün içindeki hava basıncı nedir ?

• Su damlası tarafından, yarıçapı  $R$ 'den  $R + \Delta R$ 'ye arttırmak için dış dünya üzerinde yapılan iş şudur,

$$\Delta W = (P - P_o) \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta R,$$

burada  $P$  damlanın içindeki basınç ve  $P_o$  atmosfer basıncıdır. Dengede, bu yüzey enerjisindeki artış  $\Delta A = S \cdot 8\pi R \Delta R$ 'ya eşit olmalıdır, burada  $S$  yüzey gerilimidir, ve

$$\Delta W_{\text{toplam}} = 0, \implies \Delta W_{\text{basınç}} = -\Delta W_{\text{yüzey}},$$

sonucunda,

$$(P - P_o) \cdot 4\pi R^2 \cdot \Delta R = S \cdot 8\pi R \cdot \Delta R, \implies (P - P_o) = \frac{2S}{R}.$$

Bir sabun köpüğünde, eğrilik yarıçapları neredeyse eşit olan iki hava-sabun yüzeyi vardır, ve

$$P_{\text{film}} - P_o = P_{\text{iç}} - P_{\text{film}} = \frac{2S}{R},$$

olduğundan,

$$P_{\text{iç}} - P_o = \frac{4S}{R}.$$

Böylece, köpüğün içindeki hava basıncı atmosfer basıncından  $4S/R$  kadar daha büyüktür.

(b) Bir su damlası, bir katı yüzeyde yoğunlaşır. Söz konusu üç yüzey gerilimi vardır,  $S_{aw}$ ,  $S_{sw}$ , ve  $S_{sa}$ , burada  $a$ ,  $s$ , ve  $w$ , sırasıyla hava, katı ve suyu temsil eder. Temas açısını hesaplayınız ve bir su filmi oluşumu (tam ıslatma) için koşulu bulunuz.

• Buhar bir katı yüzeyinde yoğunlaştığında, su ya bir damla oluşturur veya yüzeyde yayılır. Bu problemi ele almanın iki yolu vardır:

**Yöntem 1:** Arayüzeylerle ilgili enerji

Dengede, üç arayüzeyle ilişkili toplam enerji minimum olmalıdır, ve dolayısıyla,

$$dE = S_{aw}dA_{aw} + S_{as}dA_{as} + S_{ws}dA_{ws} = 0.$$

Katının toplam yüzey alanı sabit olduğundan,

$$dA_{as} + dA_{ws} = 0.$$

Geometrik yollarla (bkz. kanıt aşağıda), şunu elde ederiz,

$$dA_{ws} \cos \theta = dA_{aw}.$$

Bu denklemlerden, şu sonuç bulunur,

$$dE = (S_{aw} \cos \theta - S_{as} + S_{ws}) dA_{ws} = 0, \implies \cos \theta = \frac{S_{as} - S_{ws}}{S_{aw}}.$$

İspat:  $dA_{ws} \cos \theta = dA_{aw}$  için:  $R$  yarıçaplı bir kürenin parçası olan bir damla düşünün, öyle ki küre alttaş tarafından bir  $\theta$  açısıyla kesilmiş olsun. İlgili yüzeylerin alanı şöyledir,

$$A_{ws} = \pi(R \sin \theta)^2, \quad \text{ve} \quad A_{aw} = 2\pi R^2(1 - \cos \theta).$$

$R$  ve  $\theta$ 'daki değişimlerden kaynaklanan, küçük bir şekil değişimi ele alalım. Bu değişimler suyun hacmini korumalıdır, yani şu hacim kısıtı geçerlidir:

$$V = \frac{\pi R^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta + 2).$$

$x = \cos \theta$  değişkeniyle, yukarıdaki sonuçları yeniden yazabiliriz:

$$\begin{cases} A_{ws} = \pi R^2 (1 - x^2), \\ A_{aw} = 2\pi R^2 (1 - x), \\ V = \frac{\pi R^3}{3} (x^3 - 3x + 2). \end{cases}$$

Bu niceliklerin değişimleri, buradan şöyle elde edilir,

$$\begin{cases} dA_{ws} = 2\pi R \left[ \frac{dR}{dx} (1 - x^2) - Rx \right] dx, \\ dA_{aw} = 2\pi R \left[ 2 \frac{dR}{dx} (1 - x) - R \right] dx, \\ dV = \pi R^2 \left[ \frac{dR}{dx} (x^3 - 3x + 2) + R(x^2 - x) \right] dx = 0. \end{cases}$$

Son denklemden şu sonuca varırız:

$$\frac{1}{R} \frac{dR}{dx} = -\frac{x^2 - x}{x^3 - 3x + 2} = -\frac{x + 1}{(x - 1)(x + 2)}.$$

$dR/dx$ 'i yerine koymak şunu verir,

$$dA_{ws} = 2\pi R^2 \frac{dx}{x+2}, \quad \text{ve} \quad dA_{aw} = 2\pi R^2 \frac{x \cdot dx}{x+2},$$

böylece istenen sonuç bulunur:

$$dA_{aw} = x \cdot dA_{ws} = dA_{ws} \cos \theta.$$

### Yöntem 2: Temas hattında kuvvetleri dengelemek

Sonucu yorumlamanın bir başka yolu, temas hattı üzerindeki denge yüzey geriliminin kuvvet dengesini düşünmektir. Hat üzerine etkiyen dört kuvvet bulunmaktadır: (1) su-gaz arayüzeyindeki yüzey gerilimi, (2) katı-su arayüzeyindeki yüzey gerilimi, (3) gaz-katı arayüzeyindeki yüzey gerilimi, ve (4) katı-temas hattı etkileşmesinin aşağıya doğru kuvveti. Son kuvvet, temas çizgisinin katı yüzey üzerinde kalmasını sağlar ve aşağı doğrudur, çünkü, temas çizgisi sadece yatay yönde sürtünmesiz olarak hareket edebilir. Bu kuvvetler,  $y$  ve  $x$  yönlerinin her ikisi doğrultusunda da sıfırlanmalıdır. Bunlardan ikincisi, *Young denklemi* denilen temas açısı koşulunu verir,

$$\mathcal{S}_{as} = \mathcal{S}_{aw} \cdot \cos \theta + \mathcal{S}_{ws}, \quad \implies \quad \cos \theta = \frac{\mathcal{S}_{as} - \mathcal{S}_{ws}}{\mathcal{S}_{aw}}.$$

Tam ıslatma için kritik koşul  $\theta = 0$  veya  $\cos \theta = 1$  için gerçekleşir, yani,

$$\cos \theta_C = \frac{\mathcal{S}_{as} - \mathcal{S}_{ws}}{\mathcal{S}_{aw}} = 1.$$

Dolayısıyla, alttaşın tam ıslanması, aşağıdaki bağıntı sağlandığında gerçekleşir.

$$\mathcal{S}_{aw} \leq \mathcal{S}_{as} - \mathcal{S}_{ws}.$$

(c) “Büyük” cisimler aleminde, kütleçekimi baskın olan kuvvettir, “küçük” mesafelerde ise, yüzey gerilimi etkileri tümüyle önemlidir. Oda sıcaklığında suyun yüzey gerilimi  $\mathcal{S}_o \approx 7 \times 10^{-2} \text{Nm}^{-1}$ 'dir. “Büyük” ve “küçük” davranışları ayıran tipik uzunluk ölçeğini tahmin ediniz. Bu uzunluk ölçeğinin önemli olduğu birkaç örnek veriniz.

- Yüzey gerilimi etkilerinin önemli hale geldiği tipik uzunluk ölçeği, yüzey gerilimince uygulanan kuvvetler ve ilgili basınçların karşılaştırılabilir hale gelmesi koşuluyla veya yüzey enerjisinin ilgili diğer enerji değişimleriyle karşılaştırılabilir hale gelmesi koşuluyla tanımlanır.

**Örnek 1:** *Bir ıslanmayan yüzey üstündeki su damlalarının boyutunun fazla deforme olmaması.* Bu, yüzey enerjisi ve kütleçekimsel enerjinin eşitlenmesiyle belirlenir,

$$S \cdot 4\pi R^2 \approx mgR = \rho V g R = \frac{4\pi}{3} R^4 g,$$

ve buradan,

$$R \approx \sqrt{\frac{3S}{\rho g}} \approx \sqrt{\frac{3 \cdot 7 \times 10^{-2} \text{ N/m}}{10^3 \text{ kg/m}^3 \times 10 \text{ m/s}^2}} \approx 1.5 \times 10^{-3} \text{ m} = 1.5 \text{ mm}.$$

**Örnek 2: Küresel jellerin doymuş buharda şişmesi:** Jelin ozmotik basıncı (yaklaşık 1 atm) = suyun yüzey gerilimi, şunu verir,

$$\pi_{\text{jel}} \approx \frac{N}{V} k_B T \approx \frac{2S}{R},$$

burada  $N$ , jelin içindeki karşı iyonların sayısıdır.

Dolayısıyla,

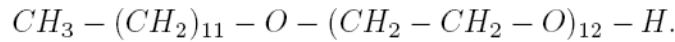
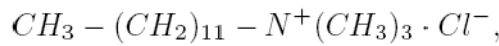
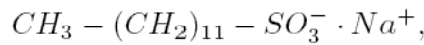
$$R \approx \left( \frac{2 \times 7 \times 10^{-2} \text{ N/m}}{10^5 \text{ N/m}^2} \right) \approx 10^{-6} \text{ m}.$$

\*\*\*\*\*

**2. Sürfaktanlar:** Sabun veya şampuandaki gibi sürfaktan molekülleri, suda çözünmek yerine hava-su yüzeyinde dağılmayı tercih ederler. Bunu görmek için, su yüzeyinde bir saç kılını yüzdürün ve yakınlarında, bir parça sabunla yavaşça suya dokununuz. (Bu, aynı zamanda bir parça sabunun bir oyuncak kağıt tekneyi hareket ettirebilmesinin nedenidir.)

(a) Hava-su yüzey gerilimi  $S_o$  (sıcaklıktan bağımsız olduğu kabul edilen),  $N$  sürfaktan parçacıklarının sayısı ve  $A$  alan olmak üzere, kabaca  $Nk_B T/A$  kadar azalır. Bu sonucu nitel olarak açıklayınız.

• Tipik sürfaktan molekülleri, su-sever bir başa ve su-sevmez bir kuyruğa sahiptir, ve su ile hava arasındaki arayüze gitmeyi tercih ederler. Bazı örnekler şunlardır,



Sürfaktan molekülleri su yüzeyine yayılır ve iki boyutlu bir gaz gibi davranır. Gazın, yoğunluğuyla ve moleküllerin iki boyutlu serbestlik derecelerinden kaynaklanan mutlak sıcaklığıyla orantılı bir basıncı vardır. Dolayısıyla, yüzey alanı artırıldığında sürfaktanlar yüzeyin serbest enerjisini düşürürler.

$$\Delta F_{\text{sürfaktan}} = \frac{N}{A} k_B T \cdot \Delta A = (S - S_o) \cdot \Delta A, \implies S = S_o - \frac{N}{A} k_B T.$$

(Yüzey geriliminin, hidrostatik basıncına ters bir işaretle tanımlandığını hatırlayınız.)

(b) Temiz bir yüzey üzerine bir su damlası yerleştirin. Damlanın yüzeyine küçük bir parça sabunla hafifçe dokunurken, hava-su yüzeyi temas açısına ne olduğunu gözleyiniz, ve gözlemi açıklayınız.

• Önceki problemde gösterildiği gibi, temas açısı şunu sağlar,

$$\cos \theta = \frac{S_{as} - S_{ws}}{S_{aw}}.$$

Damlanın yüzeyine küçük bir sabun parçasıyla dokunmak  $S_{aw}$ 'yi düşürür, böylece  $\cos \theta$  artar, veya eşdeğer olarak  $\theta$  açısı azalır.

(c) Daha dikkatli gözlemler, daha yüksek sürfaktan yoğunluklarında şunu verir,

$$\left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_T = \frac{Nk_B T}{(A - Nb)^2} - \frac{2a}{A} \left( \frac{N}{A} \right)^2, \quad \text{ve} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_A = -\frac{A - Nb}{Nk_B};$$

burada  $a$  ve  $b$  sabittir.  $S(A, T)$ 'nin ifadesini elde ediniz, ve  $a$  ve  $b$  ile tanımlanan düzeltmelerin kökenini açıklayınız.

• Sürfaktan molekülleri yoğun olduğunda etkileşmeleri önem kazanır, sonuç olarak,

$$\left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_T = \frac{Nk_B T}{(A - Nb)^2} - \frac{2a}{A} \left( \frac{N}{A} \right)^2,$$

ve

$$\left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_A = -\frac{A - Nb}{Nk_B}.$$

İlk denklemin integralini almak şunu verir,

$$S(A, T) = f(T) - \frac{Nk_B T}{A - Nb} + a \left( \frac{N}{A} \right)^2,$$

burada  $f(T)$  sadece  $T$ 'nin bir fonksiyonudur, ikinci denklemin integrali ise şunu verir,

$$S(A, T) = g(A) - \frac{Nk_B T}{A - Nb},$$

$g(A)$  sadece  $A$ 'nın bir fonksiyonudur. Bu iki denklemi karşılaştırarak,

$$S(A, T) = S_0 - \frac{Nk_B T}{A - Nb} + a \left( \frac{N}{A} \right)^2,$$

burada  $S_0$  sürfaktanların yokluğundaki yüzey gerilimini temsil eder ve  $A$  and  $T$ 'den bağımsızdır. Bu denklem, gaz-sıvı sistemlerinin van der Waals durum denklemine benzer. İkinci terimdeki  $Nb$  çarpanı, sürfaktan moleküllerinin sonlu boyutundan

kaynaklanan dışlanmış hacim etkisini temsil eder. Son terim iki sürfaktan molekülü arasındaki ikili etkileşmeyi temsil eder. Eğer sürfaktan molekülleri birbirini çekerse  $a$  katsayısı pozitifdir ve yüzey gerilimi artar.

(d)  $C_S - C_A$  için  $\frac{\partial E}{\partial T}|_A = \frac{\partial E}{\partial T}|_S$  olduğunda,  $\frac{\partial E}{\partial A}|_T$ ,  $S$ ,  $\frac{\partial S}{\partial A}|_T$ , ve  $\frac{\partial T}{\partial S}|_A$  cinsinden bir ifade bulunuz.

•  $A$  ve  $T$ 'yi bağımsız değişkenler olarak, şunu elde ederiz,

$$\delta Q = dE - S \cdot dA, \implies \delta Q = \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_T dA + \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_A dT - S \cdot dA,$$

ve

$$\delta Q = \left( \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_T - S \right) dA + \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_A dT.$$

Yukarıdaki sonuçtan, ısı sığaları şöyle elde edilir,

$$\begin{cases} C_A \equiv \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_A = \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_A \\ C_S \equiv \left. \frac{\delta Q}{\delta T} \right|_S = \left( \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_T - S \right) \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_S + \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_S \end{cases},$$

sonuç olarak

$$C_S - C_A = \left( \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_T - S \right) \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_S.$$

Aşağıdaki zincir kuralı bağıntısını kullanarak,

$$\left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_A \cdot \left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_T \cdot \left. \frac{\partial A}{\partial T} \right|_S = -1,$$

şunu elde ederiz,

$$C_S - C_A = \left( \left. \frac{\partial E}{\partial A} \right|_T - S \right) \cdot \left( \frac{-1}{\left. \frac{\partial T}{\partial S} \right|_A \cdot \left. \frac{\partial S}{\partial A} \right|_T} \right).$$

\*\*\*\*\*

**3. Sıcaklık ölçekleri:** İdeal gaz sıcaklık ölçeği  $\theta$  ve termodinamik ölçek  $T$ 'nin denkleğini, bir ideal gaz üzerine bir Carnot çevrimi uygulayarak ispatlayınız. İdeal gaz  $PV = Nk_B\theta$  denklemini sağlar ve içsel enerjisi  $E$  sadece  $\theta$ 'nın bir fonksiyonudur. Ancak,  $E \propto \theta$  olduğunu varsayamazsınız. Aşağıdaki gibi devam etmek isteyebilirsiniz:

(a) Isı alışverişleri  $Q_H$  ve  $Q_C$ 'yi  $\theta_H$ ,  $\theta_C$ , ve hacim genişleme çarpanlarının fonksiyonu olarak hesaplayınız.



- İdeal gaz sıcaklığı durum denklemleri ile tanımlanır,

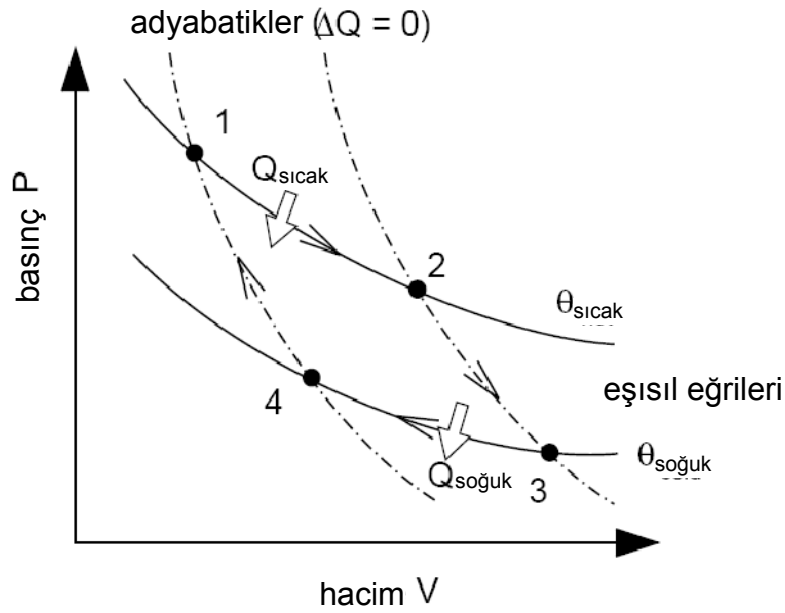
$$\theta = \frac{PV}{Nk_B}$$

Termodinamik sıcaklık, tersinir bir Carnot çevrimi için şöyle tanımlanır,

$$\frac{T_{\text{sıcak}}}{T_{\text{soğuk}}} = \frac{Q_{\text{sıcak}}}{Q_{\text{soğuk}}}$$

Bir ideal gaz için, içsel enerji sadece  $\theta$ 'nın bir fonksiyonudur, yani  $E = E(\theta)$ , ve

$$dQ = dE - dW = \frac{dE}{d\theta} \cdot d\theta + PdV.$$



Şekilde gösterilen Carnot çevrimini ele alalım. Bir eşisil genişlemeye uğrayan 1'den 2'ye giden kısım için,

$$d\theta = 0, \implies dQ_{\text{sıcak}} = PdV, \quad \text{ve} \quad P = \frac{Nk_B\theta_{\text{sıcak}}}{V}.$$

Bu nedenle, çevrimin ısı girişi genişleme çarpanıyla şöyle ilişkilidir,

$$Q_{\text{sıcak}} = \int_{V_1}^{V_2} Nk_B\theta_{\text{sıcak}} \frac{dV}{V} = Nk_B\theta_{\text{sıcak}} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right).$$

Düşük sıcaklık eşisil eğrisi boyunca yapılan benzer bir hesap şunu verir:

$$Q_{\text{soğuk}} = \int_{V_4}^{V_3} Nk_B\theta_{\text{soğuk}} \frac{dV}{V} = Nk_B\theta_{\text{soğuk}} \ln\left(\frac{V_3}{V_4}\right),$$

ve dolayısıyla

$$\frac{Q_{\text{sıcak}}}{Q_{\text{soğuk}}} = \frac{\theta_{\text{sıcak}} \ln(V_2/V_1)}{\theta_{\text{soğuk}} \ln(V_3/V_4)}$$

(b) Adyabatik bir işlemde hacim genişleme çarpanını  $\theta$ 'nın bir fonksiyonu olarak hesaplayınız.

• Şimdi, adyabatik işlemlerde hacim genişleme/sıkıştırma oranlarını hesaplayacağız. Adyabatik bir kısım boyunca,

$$dQ = 0, \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{dE}{d\theta} \cdot d\theta + \frac{Nk_B\theta}{V} \cdot dV, \quad \Rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{1}{Nk_B\theta} \frac{dE}{d\theta} \cdot d\theta.$$

Yukarıdaki iki sıcaklık arasında integrali alınarak şu elde edilir,

$$\begin{cases} \ln\left(\frac{V_3}{V_2}\right) = -\frac{1}{Nk_B} \int_{\theta_{\text{soğuk}}}^{\theta_{\text{sıcak}}} \frac{1}{\theta} \frac{dE}{d\theta} \cdot d\theta, & \text{ve} \\ \ln\left(\frac{V_4}{V_1}\right) = -\frac{1}{Nk_B} \int_{\theta_{\text{soğuk}}}^{\theta_{\text{sıcak}}} \frac{1}{\theta} \frac{dE}{d\theta} \cdot d\theta. \end{cases}$$

İntegrali açıkça almasak da (çünkü  $E(\theta)$  keyfidir), yine de şu sonuca varabiliriz,

$$\frac{V_1}{V_4} = \frac{V_2}{V_3}.$$

(c)  $Q_H/Q_C = \theta_H/\theta_C$  olduğunu gösteriniz.

• (a) ve (b) şıklarının sonuçlarını birleştirerek şunu gözlemleriz,

$$\frac{Q_{\text{sıcak}}}{Q_{\text{soğuk}}} = \frac{\theta_{\text{sıcak}}}{\theta_{\text{soğuk}}}.$$

Termodinamik sıcaklık ölçeği aşağıdaki gibi tanımlandığından,

$$\frac{Q_{\text{sıcak}}}{Q_{\text{soğuk}}} = \frac{T_{\text{sıcak}}}{T_{\text{soğuk}}},$$

$\theta$  ve  $T$ 'nin orantılı olduğu sonucuna varırız. Bunun üzerine  $\theta(\text{üçlü nokta}_{\text{H}_2\text{O}}) = T(\text{üçlü nokta}_{\text{H}_2\text{O}}) = 273.16$  tanımını yaparsak,  $\theta$  ve  $T$  özdeş hale gelirler.

\*\*\*\*\*

**4. Durum Denklemleri:** Durum denklemi içsel enerjinin biçimini, aşağıdaki örneklerdeki gibi sınırlandırır.

(a)  $dE = TdS - PdV$ 'den başlayarak,  $PV = Nk_B T$  durum denkleminin, aslında  $E$ 'nin sadece  $T$ 'ye bağımlı olmasını gerektirdiğini gösteriniz.

• Sadece bir biçimde iş bulunduğundan, herhangi iki parametreyi bağımsız değişkenler olarak seçebiliriz. Örneğin,  $T$  ve  $V$ 'yi seçerek, yani  $E = E(T, V)$ , ve  $S = S(T, V)$  alarak, şunu elde ederiz,

$$dE = TdS - PdV = T \left. \frac{\partial S}{\partial T} \right|_V dT + T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T dV - PdV,$$

sonuç olarak,

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T - P.$$

Aşağıdaki Maxwell bağıntısını kullanarak<sup>†</sup>

$$\left. \frac{\partial S}{\partial V} \right|_T = \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V,$$

şunu elde ederiz

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = T \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V - P.$$

İdeal gazda  $T \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = T \frac{Nk_B}{V} = P$  olduğundan,  $\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = 0$ . Dolayısıyla,  $E$  sadece  $T$ 'ye bağlıdır, yani  $E = E(T)$ .

(b) Sadece sıcaklığa bağlı olan bir içsel enerjiyle tutarlı en genel durum denklemi nedir?

• Eğer  $E = E(T)$  ise,

$$\left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_T = 0, \quad \implies \quad T \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V = P.$$

Bu denklemin çözümü,  $f(V)$  sadece  $V$ 'nin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere,  $P = f(V)T$ 'dir.

(c) Bir van der Waals gazında,  $C_V$ 'nin sadece sıcaklığın bir fonksiyonu olduğunu gösteriniz.

• van der Waals durum denklemi şöyledir,

$$\left[ P - a \left( \frac{N}{V} \right)^2 \right] \cdot (V - Nb) = Nk_B T,$$

veya

$$P = \frac{Nk_B T}{(V - Nb)} + a \left( \frac{N}{V} \right)^2.$$

Bu denklemlerden şu sonuca varırız,

$$C_V \equiv \left. \frac{\partial E}{\partial T} \right|_V, \quad \implies \quad \left. \frac{\partial C_V}{\partial V} \right|_T = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ T \left. \frac{\partial P}{\partial T} \right|_V - P \right\} = T \left. \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right|_V = 0.$$

<sup>†</sup>  $dL = X dx + Y dy + \dots, \quad \implies \quad \left. \frac{\partial X}{\partial y} \right|_x = \left. \frac{\partial Y}{\partial x} \right|_y = \frac{\partial^2 L}{\partial x \cdot \partial y}.$

\*\*\*\*\*

5. *Clausius-Clapeyron denklemi* kaynama noktasının basınçla değişimini tanımlar. Genellikle, birlikte var olduklarında gaz ve sıvı fazların kimyasal potansiyellerinin aynı olması koşulundan türetilir.

- Aşağıdaki

$$\mu_{\text{sıvı}}(P, T) = \mu_{\text{gaz}}(P, T),$$

ve

$$\mu_{\text{sıvı}}(P + dP, T + dT) = \mu_{\text{gaz}}(P + dP, T + dT),$$

denklemlerinden, birlikte varoluş hattı boyunca şu sonuca varırız,

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{coX}} = \frac{\left. \frac{\partial \mu_g}{\partial T} \right|_P - \left. \frac{\partial \mu_l}{\partial T} \right|_P}{\left. \frac{\partial \mu_l}{\partial P} \right|_T - \left. \frac{\partial \mu_g}{\partial P} \right|_T}.$$

Kapsamsallık koşulundan, Gibbs serbest enerjisi  $G = N\mu(P, T)$ 'nin değişimleri şöyle verilir,

$$V = \left. \frac{\partial G}{\partial P} \right|_T, \quad S = - \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P.$$

Yoğun nicelikler cinsinden

$$v = \frac{V}{N} = \left. \frac{\partial \mu}{\partial P} \right|_T, \quad s = \frac{S}{N} = - \left. \frac{\partial \mu}{\partial T} \right|_P,$$

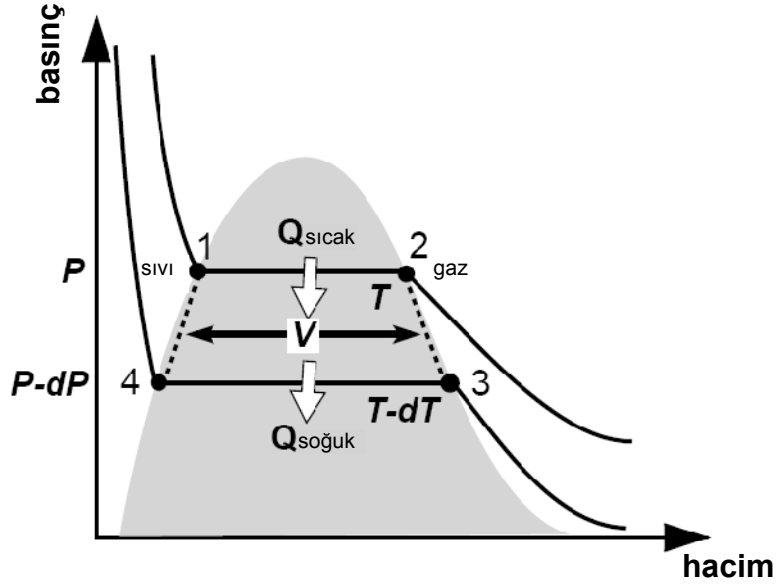
burada,  $s$  ve  $v$  sırasıyla, molar entropi ve hacimdir. Dolayısıyla, birlikte varoluş hattı şu koşulu sağlar

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{coX}} = \frac{S_g - S_l}{V_g - V_l} = \frac{s_g - s_l}{v_g - v_l}.$$

Alternatif bir türetim için, bir mol su kullanarak bir Carnot makinesi ele alalım. Kaynak  $(P, T)$ 'de, latent ısı  $L$  verilip su buhara çevrilir. Bu işlemler bağlantılı bir  $V$  hacim artışı vardır. Basınç adyabatik olarak  $P - dP$ 'ye düşürülür. Gider  $(P - dP, T - dT)$ 'de buhar tekrar suya yoğunlaşır.

(a) Makinenin iş çıktısının  $W = VdP + \mathcal{O}(dP^2)$  olduğunu gösteriniz. Buradan, aşağıdaki Clausius-Clapeyron denklemini elde ediniz.

$$\left. \frac{dP}{dT} \right|_{\text{kaynama}} = \frac{L}{TV}. \quad (1)$$



- Adyabatik işlemlerin sabit  $V$  hacminde ( $P - V$  diyagramındaki düşey hatlar) gerçekleştiği yaklaşıklığını kullanırsak, şunu buluruz

$$W = \oint P dV = PV - (P - dP)V = V dP.$$

Burada, gazinkinden çok daha küçük olan sıvı durumun hacmini ihmal ettik Yapılan hatanın derecesi aşağıdaki gibi

$$\left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S dP \cdot dP = O(dP^2),$$

olduğundan, elimizde,

$$W = V dP + O(dP^2).$$

Herhangi bir Carnot çevriminin verimi şöyle verilir,

$$\eta = \frac{W}{Q_H} = 1 - \frac{T_C}{T_H},$$

ve şimdiki durumda,

$$Q_H = L, \quad W = V dP, \quad T_H = T, \quad T_C = T - dT.$$

Bu değerleri verimliliğin evrensel formülüne yerleştirdiğimizde, Clausius-Clapeyron denklemini elde ederiz.

$$\frac{V dP}{L} = \frac{dT}{T}, \quad \text{veya} \quad \left. \frac{dP}{dT} \right|_{coX} = \frac{L}{T \cdot V}.$$

(b) Şu iddianın sorunu nedir?: “Bir mol suyu buhara çevirmek için kaynakta verilen  $Q_H$  ısı  $L(T)$ 'dir. Giderde bir mol buharı suya yoğunlaştırmak için  $L(T - dT)$  verilir. Aradaki

fark  $dTdL/dT$ ,  $W = VdP$  işine, ve denklem (1)'den dolayı  $LdT/T$ 'ye eşit olmalıdır. Buradan,  $dL/dT = L/T$  ve sonucunda  $L$  ile  $T$  orantılı olmalıdır!"

- "Giderde bir mol suyu yoğuşturmak için  $L(T - dT)$  verilir" ifadesi yanlıştır. Gösterilen  $P - V$  diyagramında, "1"deki durum sadece suya, "2" sadece buhara karşılık gelir, ama "3" ve "4"teki durumlar iki fazı birlikte içerir. Durum 3'ten 4'e giderken bir molden daha az buhar suya çevrilir. Buharın bir kısmı zaten  $2 \rightarrow 3$  adyabatik genişleme sırasında suya çevrilmiştir, ve geri kalan kısım da  $4 \rightarrow 1$  adyabatik sıkıştırma sırasında çevrilir. Dolayısıyla, gerçek latent ısı bir mol suyun katkısından daha az olmalıdır.

(c)  $L$ 'nin yaklaşık olarak sıcaklıktan bağımsız, ve hacim değişiminde, ideal gaz olarak alınan, yani  $V = Nk_B T/P$  buhar hacminin baskın olduğunu varsayınız.  $P(T)$ 'yi elde etmek için denklem (1)'in integralini alınız.

- İdeal gaz için,

$$V = \frac{Nk_B T}{P}, \quad \Rightarrow \quad \left. \frac{dP}{dT} \right|_{coX} = \frac{LP}{Nk_B T^2}, \quad \text{veya} \quad \frac{dP}{P} = \frac{L}{Nk_B T^2} dT.$$

Bu denklemin integralini alarak, basınç  $P$ 'nin bir fonksiyonu olarak kaynama sıcaklığı şöyle elede edilir,

$$P = C \cdot \exp\left(-\frac{L}{k_B T_{\text{Kaynama}}}\right).$$

(d) Bir kasırğa, yukarıda tanımlanan makineye biraz benzer işler. Su okyanusun ılık yüzeyinde buharlaşır, buhar atmosferde yükselir, ve yüksek ve daha soğuk irtifalarda suya yoğuşur. Coriolis kuvveti havanın yukarı doğru emilimini spiral harekete dönüştürür. (Buz ve kaynayan su kullanarak çay fincanında küçük bir fırtına koparabilirsiniz.) İlık okyanus yüzeyinin ve yüksek irtifa sıcaklıklarının tipik değerleri, sırasıyla  $80^\circ F$  ( $300^\circ K$ ) ve  $-120^\circ F$  ( $189^\circ K$ )'dir. İlık su yüzey tabakası yeterli su buharı sağlayabilmek için en az 200 feet (61 m) kalınlığında olmalıdır, çünkü kasırğanın, kendini koruyabilmek için saate yaklaşık 90 milyon ton su buharını yoğuşturması gereklidir. Böyle bir kasırğanın mümkün olan maksimum verimliliği ve güç çıktısını kestiriniz. (Suyun buharlaşmasının latent ısısı  $2.3 \times 10^6 Jkg^{-1}$  civarındadır.)

- $T_C = -120^\circ F = 189^\circ K$ , ve  $T_H = 80^\circ F = 300^\circ K$  için, bir Carnot makinesinde olduğu gibi verimliliğin sınır değeri şudur,

$$\eta_{max} = \frac{T_H - T_C}{T_H} = 0.37.$$

Güç çıktısı, (giren güç)  $\times$  (verimlilik)'tir. Bu durumda giren güç, ılık okyanus suyunun buharlaşmasından elde edilen enerjidir, böylece,

$$\begin{aligned} \text{Güç çıktısı} &= \frac{dW}{dt} = \frac{dQ_c}{dt} \times \frac{T_H - T_C}{T_C} \\ &= \frac{90 \times 10^6 \text{ ton}}{\text{sa}} \cdot \frac{1 \text{ sa}}{3600 \text{ sn}} \cdot \frac{1000 \text{ kg}}{\text{ton}} \cdot \frac{2.3 \times 10^6 \text{ J}}{\text{kg}} \times 0.67 \approx 4 \times 10^{13} \text{ watt} \end{aligned}$$

(e) Yerçekiminden dolayı atmosfer basıncı  $P(h)$  yükseklik  $h$  ile azalır. (ideal bir gaz gibi davranan)  $dh$  kalınlığında bir hava tabakasının üstüne etkiyen kuvvetleri dengeleyerek,  $P(h) = P_0 \exp(-mgh/kT)$  olduğunu gösteriniz, burada  $m$  hava moleküllerinin ortalama kütlesidir.

• Alanı  $A$  olan,  $h$  ve  $h + dh$  yükseklikleri arasındaki yatay bir hava tabakasını ele alalım. Tabakadaki parçacıkların kütesinden dolayı yerçekim kuvveti şudur,

$$dF_{\text{yerçekimi}} = mg \frac{N}{V} Adh = mg \frac{P}{k_B T} Adh,$$

burada, yoğunluk ( $N/V$ )'yi basınçla ilişkilendirmek için ideal gaz yasasını kullandık. Denge, yerçekim kuvveti basınçtan kaynaklanan kuvvetle dengelenir,

$$dF_{\text{basınç}} = A [P(h) - P(h + dh)] = - \frac{\partial P}{\partial h} Adh.$$

İki kuvvetin eşitlenmesi, sıcaklığın yükseklikle değişmediği varsayımı altında şunu verir,

$$\frac{\partial P}{\partial h} = -mg \frac{P}{k_B T}, \quad \Rightarrow \quad P(h) = p_0 \exp\left(-\frac{mgh}{k_B T}\right),$$

(f) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, Everest dağının tepesinde ( $h \approx 9\text{km}$ ) suyun kaynama sıcaklığını tahmin ediniz. Suyun buharlaşmasının latent ısısı  $2.3 \times 10^6 \text{ J kg}^{-1}$  civarındadır.

• (c) ve (e) sonuçlarının sonuçlarını kullanarak şunu buluruz,

$$\frac{P_{\text{Everest}}}{P_{\text{deniz}}} \approx \exp\left(-\frac{mg}{k_B T} (h_{\text{Everest}} - h_{\text{deniz}})\right) \approx \exp\left[-\frac{L}{k_B} \left(\frac{1}{T_{\text{Everest}}(\text{kayna})} - \frac{1}{T_{\text{deniz}}(\text{kayna})}\right)\right].$$

Verilen sayısal değerlerle,  $T_{\text{Everest}}(\text{kayna}) \approx 346^\circ \text{K}$  ( $74^\circ \text{C} \approx 163^\circ \text{F}$ ) bulunur.

\*\*\*\*\*

**6. Cam:** Sıvı kuvars, yavaşça soğutulursa,  $T_m$  sıcaklığında kristalleşir, ve  $L$  latent ısısı verir. Daha hızlı soğutma koşullarında, sıvı aşırısoğutulur ve camsı hale gelir.

(a) Kuvarşın her iki fazı da neredeyse sıkıştırılmaz olduğundan iş girdisi yoktur ve içsel enerjideki değişimler  $dE = TdS + \mu dN$  eşitliğini sağlar. Kapsamsallık koşulunu kullanarak  $E$ ,  $T$ ,  $S$ , ve  $N$  cinsinden  $\mu$  için bir ifade elde ediniz.

• Mevcut bağlamda sadece kimyasal içi gözettiğimizden, entropiyi iki bağımsız değişkenin fonksiyonu olarak, örneğin  $dS = dE/T - \mu dN/T$ 'den doğal olarak görünen,  $E$  ve  $N$ , alabiliriz. Entropi kapsamsal bir değişken olduğundan,  $\lambda S = S(\lambda E, \lambda N)$ . Bunun  $\lambda$ 'ya göre türevini alıp, sonuç ifadesinde  $\lambda = 1$  konduğunda şu bulunur,

$$S(E, N) = \left. \frac{\partial S}{\partial E} \right|_N E + \left. \frac{\partial S}{\partial N} \right|_E N = \frac{E}{T} - \frac{N\mu}{T},$$

ve buradan,

$$\mu = \frac{E - TS}{N}.$$

(b)  $\alpha$  ve  $\beta$  sabitler olmak üzere, kristal kuvarşın ısı sığası yaklaşık  $C_X = \alpha T^3$ 'tür, camı kuvarş için ise, kabaca  $C_G = \beta T$ 'dir.

Termodinamiğin üçüncü yasasının hem kristal hem camı fazlar için geçerli olduğunu varsayarak,  $T \leq T_m$  sıcaklıklarında bu iki fazın entropilerini hesaplayınız.

• Sonlu sıcaklıktaki entropiler,  $S(T = 0) = 0$ 'dan başlayıp,  $dQ/T$ 'nin integrali alınarak elde edilebilir. Isı girdilerini elde etmek için ısı sığalarını kullanarak, şunu buluruz,

$$\begin{cases} C_{\text{kristal}} = \alpha T^3 = \frac{T}{N} \frac{dS_{\text{kristal}}}{dT}, & \implies S_{\text{kristal}} = \frac{N\alpha T^3}{3}, \\ C_{\text{cam}} = \beta T = \frac{T}{N} \frac{dS_{\text{cam}}}{dT}, & \implies S_{\text{cam}} = \beta NT. \end{cases}$$

(c) Sıfır sıcaklıkta, cam ve kristal kuvarşın yerel bağ yapıları benzerdir, böylece yaklaşık olarak aynı içsel enerji  $E_0$ 'a sahiptir.  $T \leq T_m$  sıcaklıklarında, iki fazın içsel enerjilerini hesaplayınız.

•  $dE = TdS + \mu dN$  olduğundan,  $dN = 0$  için,

$$\begin{cases} dE = TdS = \alpha NT^3 dT & (\text{kristal}) \\ dE = TdS = \beta NT dT & (\text{cam}) \end{cases}$$

$T = 0$ 'da aynı içsel enerji  $E_0$ 'dan başlayarak, bu ifadelerin integralleri alınırsa,

$$\begin{cases} E = E_0 + \frac{\alpha N}{4} T^4 & (\text{kristal}), \\ E = E_0 + \frac{\beta N}{2} T^2 & (\text{cam}). \end{cases}$$



(d) İki faz arasında termal denge koşulunu kullanarak, denge erime sıcaklığı  $T_m$ 'yi  $\alpha$  ve  $\beta$  cinsinden hesaplayınız.

- İki faz arasında kimyasal denge koşulundan,  $\mu_{\text{kristal}} = \mu_{\text{cam}}$ , şunu buluruz,

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \cdot \alpha T^4 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \beta T^2, \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha T^4}{12} = \frac{\beta T^2}{2},$$

sonuç olarak erime sıcaklığı,

$$T_{\text{eri}} = \sqrt{\frac{6\beta}{\alpha}}.$$

(e) Latent ısı  $L$ 'yi  $\alpha$  and  $\beta$  cinsinden hesaplayınız.

- Önceki şıklardaki varsayımlardan, camdan kristale geçişin latent ısısı,

$$\begin{aligned} L &= T_{\text{eri}} (S_{\text{cam}} - S_{\text{kristal}}) = NT_{\text{eri}} \left( \beta T_{\text{eri}} - \frac{\alpha T_{\text{eri}}^3}{3} \right) \\ &= NT_{\text{eri}}^2 \left( \beta - \frac{\alpha T_{\text{eri}}^2}{3} \right) = NT_{\text{eri}}^2 (\beta - 2\beta) = -N\beta T_{\text{eri}}^2 < 0. \end{aligned}$$

(f) Önceki şıkta bulunan sonuç doğru mudur? Değil ise, bu sonuca götüren adımlardan hangisinin yanlış olması çok muhtemeldir?

- Yukarıdaki sonuç, kristal fazın entropisinin cam fazından daha büyük olmasını gerektirir. Bu açıkça fiziksel değildir ve varsayımlardan biri yanlış olmalıdır. Şüpheli adım, cam fazın termodinamiğin üçüncü yasasına tabi olduğu ve  $T = 0$ 'da sıfır entropisi olduğu varsayımıdır. Aslında, cam maddenin ergodik olmayan bir durumudur, özgün bir taban durumu yoktur, ve üçüncü yasayı ihlal eder.

\*\*\*\*\*

**7. Karakteristik fonksiyonlar:** Şu olasılık yoğunluğu fonksiyonlarının karakteristik fonksiyonlarını, ortalama ve varyanslarını hesaplayınız.

(a) *Tekdüze*  $p(x) = \frac{1}{2a}$  eğer  $-a < x < a$ , ve  $p(x) = 0$  aksi taktirde;

- Bir *tekdüze* olasılık dağılımı,

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & \text{eğer } -a < x < a \\ 0 & \text{Aksi taktirde} \end{cases},$$

ki pek çok örneği vardır, şunu verir,

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{2a} \int_{-a}^a \exp(-ikx) dx = \frac{1}{2a} \frac{1}{-ik} \exp(-ikx) \Big|_{-a}^a \\ &= \frac{1}{ak} \sin(ka) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(ak)^{2m}}{(2m+1)!}. \end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$m_1 = \langle x \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad m_2 = \langle x^2 \rangle = \frac{1}{3}a^2.$$

(b) *Laplace*  $p(x) = \frac{1}{2a} \exp(-\frac{|x|}{a})$  ;

• *Laplace* OYF,

$$p(x) = \frac{1}{2a} \exp\left(-\frac{|x|}{a}\right),$$

örneğin bulanık ortamda ışık soğurulmasını tanımlar, şunu verir

$$\begin{aligned} f(k) &= \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^{\infty} dx \exp\left(-ikx - \frac{|x|}{a}\right) \\ &= \frac{1}{2a} \int_0^{\infty} dx \exp(-ikx - x/a) + \frac{1}{2a} \int_{-\infty}^0 dx \exp(-ikx + x/a) \\ &= \frac{1}{2a} \left[ \frac{1}{-ik + 1/a} - \frac{1}{-ik - 1/a} \right] = \frac{1}{1 + (ak)^2} \\ &= 1 - (ak)^2 + (ak)^4 - \dots \end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$m_1 = \langle x \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad m_2 = \langle x^2 \rangle = 2a^2.$$

(c) *Cauchy*  $p(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}$

• *Cauchy*, veya *Lorentz* OYF, difusif modlarca saçılan ışığın spektrumunu tanımlar, ve şöyle verilir

$$p(x) = \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)}.$$

Bu dağılım için,

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \frac{a}{\pi(x^2 + a^2)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) \left[ \frac{1}{x - ia} - \frac{1}{x + ia} \right] dx. \end{aligned}$$

Yukarıdaki integralleri hesaplamamanın en kolay yöntemi, integralin yolunu karmaşık düzlem üzerinde kapatmak ve rezidüyü hesaplamaktır. İntegrandın sonsuzda sıfıra gidişi, yolun karmaşık düzlemin hangi yarısında (yukarı veya aşağı) kapatılması gerektiğini belirler, ve şuna götürür,

$$f(k) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\exp(-ikx)}{x + ia} dx = \exp(-ka) \quad \text{eğer } k \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi i} \int_B \frac{\exp(-ikx)}{x - ia} dx = \exp(ka) \quad \text{eğer } k < 0 \end{array} \right\} = \exp(-|ka|).$$

$f(k)$ 'nin bu durumda analitik bir fonksiyon olmadığına ve bu nedenle bir Taylor açılımının bulunmadığına dikkat ediniz. Momentler başka bir yöntemle, örneğin doğrudan hesaplama ile belirlenmelidir,

$$m_1 = \langle x \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad m_2 = \langle x^2 \rangle = \int dx \frac{\pi}{a} \cdot \frac{x^2}{x^2 + a^2} \rightarrow \infty.$$

Birinci moment simetriden dolayı sıfırdır, ikinci (ve daha yüksek) momentler ise  $f(k)$ 'nin analitik olmayan doğasıyla uyumlu olarak, iraksar.

Şu iki olasılık yoğunluğu fonksiyonu  $x \geq 0$  için tanımlıdır. Her birinin sadece ortalama ve varyansını hesaplayınız.

(d) *Rayleigh*  $(x) = \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right),$

• *Rayleigh* dağılımı,

$$p(x) = \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \quad \text{eğer} \quad x \geq 0,$$

iki boyutta rassal yürüme uzunluğu için kullanılabilir. Karakteristik fonksiyonu şudur,

$$\begin{aligned} f(k) &= \int_0^{\infty} \exp(-ikx) \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx \\ &= \int_0^{\infty} [\cos(kx) - i \sin(kx)] \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx. \end{aligned}$$

İntegraller basit değildir, ama şöyle hesaplanabilir,

$$\int_0^{\infty} \cos(kx) \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} (2a^2 k^2)^n,$$

ve

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \sin(kx) \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(kx) \frac{x}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} ka \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{2}\right), \end{aligned}$$

sonuç olarak

$$f(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n)!} (2a^2 k^2)^n - i \sqrt{\frac{\pi}{2}} ka \exp\left(-\frac{k^2 a^2}{2}\right).$$

Ayrıca momentler de doğrudan şöyle hesaplanabilir,

$$m_1 = \langle x \rangle = \int_0^\infty \frac{x^2}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = \int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{2a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a,$$

$$m_2 = \langle x^2 \rangle = \int_0^\infty \frac{x^3}{a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = 2a^2 \int_0^\infty \frac{x^2}{2a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) d\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$= 2a^2 \int_0^\infty y \exp(-y) dy = 2a^2.$$

(e) *Maxwell*  $p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$

- *Maxwell* dağılımının karakteristik fonksiyonunu hesaplamak zordur,

$$p(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x^2}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right),$$

örneğin bir gaz parçacığının hızını tanımlar. Ancak, ortalama ve varyansı doğrudan şöyle hesaplayabiliriz,

$$m_1 = \langle x \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^3}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \int_0^\infty \frac{x^2}{2a^2} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) d\left(\frac{x^2}{2a^2}\right)$$

$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a \int_0^\infty y \exp(-y) dy = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} a,$$

ve

$$m_2 = \langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^4}{a^3} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) dx = 3a^2.$$

\*\*\*\*\*

**8. Tchebycheff eşitsizliği:** Ortalaması  $\lambda$  ve varyansı  $\sigma^2$  olan,  $(-\infty < x < \infty)$  için herhangi bir olasılık yoğunluğu  $p(x)$ 'i ele alalım.  $\lambda$ 'dan uzaklığı  $n\sigma$ 'dan fazla olan sonuçların toplam olasılığının  $1/n^2$ 'den daha az olduğunu gösteriniz, yani

$$\int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} dx p(x) \leq \frac{1}{n^2}.$$

*İpucu:*  $\sigma^2$ 'yi tanımlayan integralden başlayın, ve onu,  $|x - \lambda| > n\sigma$  ve  $|x - \lambda| < n\sigma$ 'ya karşılık gelen parçalara bölün.

- Tanım gereği, OYF  $p(x)$ , ve ortalaması  $\lambda$  olan bir sistemin varyansı,

$$\sigma^2 = \int (x - \lambda)^2 p(x) dx.$$

İntegrali şöyle iki parçaya bölelim

$$\sigma^2 = \int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx + \int_{|x-\lambda| < n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx,$$

sonuç olarak

$$\sigma^2 - \int_{|x-\lambda| < n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx = \int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx.$$

Aşağıdaki eşitsizliği kullanıp

$$\int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx \geq \int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} (n\sigma)^2 p(x) dx,$$

şunu elde ederiz

$$\int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} (n\sigma)^2 p(x) dx \leq \sigma^2 - \int_{|x-\lambda| < n\sigma} (x-\lambda)^2 p(x) dx \leq \sigma^2,$$

ve

$$\int_{|x-\lambda| \geq n\sigma} p(x) dx \leq \frac{1}{n^2}.$$

\*\*\*\*\*

**9. En iyi seçim:** Pek çok özel populasyonda, üyeleri arasında az değişkenlik vardır.

Bu optimal seçimin doğal bir sonucu mudur?

(a)  $\{r_\alpha\}$ , herbiri bir olasılık yoğunluğu  $p(r)$ 'den  $r \in [0,1]$  olmak üzere, bağımsızca seçilmiş  $n$  tane rassal sayı olsun. Bu kümenin en büyük değeri için, yani  $x = \max\{r_1, \dots, r_n\}$  için olasılık yoğunluğu  $p_n(x)$ 'i hesaplayınız,

•  $n$  tane rassal sayının maksimumunun  $x$  ve  $x + dx$  arasında olma olasılığı, sonuçlardan birinin bu aralıkta bulunması ve diğer tümünün ise  $x$ 'ten küçük olma olasılığına eşittir, yani

$$p_n(x) = p(r_1 = x, r_2 < x, r_3 < x, \dots, r_n < x) \times \binom{n}{1},$$

burada ikinci çarpan, hangi  $r_\alpha = x$ 'i seçmenin yollarının sayısıdır. Bu olaylar bağımsız olduğundan,

$$\begin{aligned} p_n(x) &= p(r_1 = x) \cdot p(r_2 < x) \cdot p(r_3 < x) \cdots p(r_n < x) \times \binom{n}{1} \\ &= p(r = x) [p(r < x)]^{n-1} \times \binom{n}{1}. \end{aligned}$$

$r < x$ 'in olasılığı, basitçe bir birikimli olasılık fonksiyonudur, ve

$$p_n(x) = n \cdot p(x) \cdot \left[ \int_0^x p(r) dr \right]^{n-1}.$$

(b) Eğer her bir  $r_\alpha$  0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış ise,  $x$ 'in ortalama ve varyansını  $n$ 'nin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız, ve büyük  $n$  için davranışını yorumlayınız.

• Eğer her bir  $r_\alpha$  0 ile 1 arasında tekdüze dağılmış ise,  $p(r) = 1$  ( $\int_0^1 p(r)dr = \int_0^1 dr = 1$ ). Bu OYF ile şunu buluruz,

$$p_n(x) = n \cdot p(x) \cdot \left[ \int_0^x p(r)dr \right]^{n-1} = n \left[ \int_0^x dr \right]^{n-1} = nx^{n-1},$$

ve ortalama şimdi şöyle verilir

$$\langle x \rangle = \int_0^1 xp_n(x)dx = n \int_0^1 x^n dx = \frac{n}{n+1}.$$

Maksimumun ikinci momenti şöyledir,

$$\langle x^2 \rangle = n \int_0^1 x^{n+1} dx = \frac{n}{n+2},$$

sonuç olarak varyans şudur,

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{n}{n+2} - \left( \frac{n}{n+1} \right)^2 = \frac{n}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Büyük  $n$  için ortalamanın sınır değer bire yaklaştığına, varyansın ise  $1/n^2$  biçiminde sifıra gittiğine dikkat ediniz. Dağılımın üst kısmında, geniş bir varyans için çok az yer vardır.

\*\*\*\*\*