

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için

<http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr>

sitesini ziyaret ediniz.

Gözden Geçirme Problemleri

Geçmiş yıllara ait ekteki sınavlar (ve çözümleri), ders içeriğini gözden geçirmenize yardımcı olmaya yöneliktir.

Her problemin ilk kısımlarının son kısımlarından daha kolay olduğuna dikkat ediniz. Bu yüzden, takıldığınızda sonraki soruya geçmeyi unutmayınız.

Aşağıdaki bilgileri yararlı bulabilirsiniz:

Fiziksel Sabitler

Elektron kütlesi	$m_e \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$	Proton kütlesi	$m_p \approx 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Elektron Yüğü	$e \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$	Planck sab./ 2π	$\hbar \approx 1.1 \times 10^{-34} \text{ Js}^{-1}$
Işık Hızı	$c \approx 3.0 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$	Stefan sabiti	$\sigma \approx 5.7 \times 10^{-8} \text{ Wm}^{-2} \text{ K}^{-4}$
Boltzmann sabiti	$k_B \approx 1.4 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$	Avogadro sayısı	$N_0 \approx 6.0 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Çevrim Çarpanları

$$1 \text{ atm} \equiv 1.0 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2} \quad 1 \text{ \AA} \equiv 10^{-10} \text{ m} \quad 1 \text{ eV} \equiv 1.1 \times 10^4 \text{ K}$$

Termodinamik

$$dE = TdS + dW$$

$$\text{Gaz için: } dW = -PdV$$

$$\text{Film için: } dW = \sigma dA$$

Matematiksel Formüller

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \coth x = 1 + 2e^{-2x} + \mathcal{O}(e^{-4x})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + \mathcal{O}(x^2)$$

$$\int_0^\infty dx x^n e^{-\alpha x} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)! = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\int_{-\infty}^\infty dx \exp\left[-ikx - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right] = \sqrt{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{\sigma^2 k^2}{2}\right]$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \ln N! = N \ln N - N$$

$$\langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle$$

$$\ln \langle e^{-ikx} \rangle = \sum_{n=1}^\infty \frac{(-ik)^n}{n!} \langle x^n \rangle_c$$

$$f_m^\eta(z) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty dx \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - \eta} = \sum_{\alpha=1}^\infty \eta^{\alpha+1} \frac{z^\alpha}{\alpha^m}$$

$$\frac{df_m^\eta}{dz} = \frac{1}{z} f_{m-1}^\eta$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f_m^-(z) = \frac{(\ln z)^m}{m!} \left[1 + \frac{\pi^2}{6} m(m-1)(\ln z)^{-2} + \dots\right] \quad f_2^-(1) = \frac{\pi^2}{12} \quad f_4^-(1) = \frac{7\pi^4}{720}$$

$$\zeta_m \equiv f_m^+(1) \quad \zeta_{3/2} \approx 2.612 \quad \zeta_2 = \frac{\pi^2}{6} \quad \zeta_{5/2} \approx 1.341 \quad \zeta_3 \approx 1.202 \quad \zeta_4 = \frac{\pi^4}{90}$$

1. *Bir yarıiletkende eksiton ayrışması*: Bir yarıiletken üzerine yoğun bir lazer ışını göndermek, yığında, elektron ($-e$ yüklü ve m_e etkin kütleli) ve boşlukların ($+e$ yüklü ve m_h etkin kütleli) yarıkararlı bir topluluğunu oluşturabilir. Zıt yüklü parçacıklar (bir hidrojen atomunda olduğu gibi) çiftlenerek bir *eksiton* gazı, veya ayrışıp bir plazma oluşturabilir. Bu işlemin çok daha basitleştirilmiş bir modelini inceleyeceğiz.

(a) m_e ve m_h kütleli, etkileşmeyen klasik parçacıklar gibi ele alarak, T sıcaklığında N_e tane elektron ve N_h tane boşluktan oluşan bir gazın serbest enerjisini hesaplayınız.

(b) Bir eksiton oluşturan elektron boşluk çifti enerjisini ε kadar düşürür. [Hidrojen benzeri bir eksitonun bağlanma enerjisi, ε dielektrik sabiti ve $m^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$ iken, $\varepsilon \approx me^4/(2\hbar^2\varepsilon^2)$ 'dir.] $m = m_e + m_h$ kütleli, etkileşmeyen klasik parçacıklar gibi ele alarak, N_p tane eksitondan oluşan bir gazın serbest enerjisini hesaplayınız.

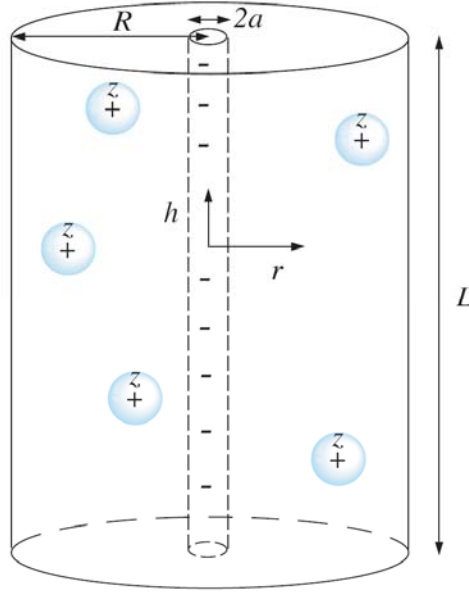
(c) Elektron, boşluk ve eksiton durumlarının, sırasıyla, μ_e , μ_h , ve μ_p kimyasal potansiyellerini hesaplayınız.

(d) Eksitonlar ve elektron/boşluklar arasındaki denge koşulunu, kimyasal potansiyelleri cinsinden ifade ediniz.

(e) Yüksek bir T sıcaklığında, eksitonların n_p yoğunluğunu, uyarımların $n \approx n_e + n_h$ toplam yoğunluğunun bir fonksiyonu olarak bulunuz.

2. *Manning geçişi*: DNA gibi iyonik polimerler (polielektrolitler) suya batırıldığında negatif yüklü ters iyonlar, geride pozitif yüklü bir polimer bırakarak çözeltiliye karışır. Geride bırakılan yüklerin elektrostatik itmesi yüzünden, aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi polimer a yarıçaplı bir silindir biçiminde uzar. Termal dalgalanmalar iyonların çözelti içinde dolaşmalarını desteklerken, elektrostatik çekmeler dönüp polimer üzerinde yoğunlaşmalarını tercih eder. Eğer karşı-iyonların sayısı N ise, çubuk üzerinde kalan N tane pozitif yükü $\varphi(r) = -2(Ne/L) \ln(r/L)$ potansiyeliyle etkileşir, burada r silindirik geometride radyal koordinattır. Eğer karşı-iyonlar arasındaki Coulomb itmesini gözardı edersek, şu klasik Hamiltonyen ile tanımlanabilirler,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + 2e^2 n \ln\left(\frac{r}{L}\right) \right],$$



burada $n = N/L$ 'dir.

(a) Yarıçapı R olan silindirik bir kap için, kanonik üleşim fonksiyonu Z 'yi sıcaklık T , yoğunluk n , ve yarıçaplar R ve a cinsinden hesaplayınız.

(b) Bir karşı-iyonun radyal konumu ve birinci momentini $\langle r \rangle$ için olasılık dağılım fonksiyonu $p(r)$ 'yi hesaplayınız.

(c) Yukarıda $R \gg a$ limitinde hesaplanan sonuçların davranışı, yüksek ve düşük sıcaklıklarda çok farklıdır. Geçiş sıcaklığını belirleyiniz ve bu iki fazın doğasını tanımlayınız. Özellikle, her iki durumda $\langle r \rangle$ 'nin R ve a bağımlılığı nasıldır?

(d) Karşı-iyonların kabın duvarlarına uyguladığı basıncı $r = R$ 'de, $R \gg a$ limitinde, tüm sıcaklıklar için hesaplayınız.

(e) Karşı-iyonlar arasındaki Coulomb etkileşmesi hesaba katılırsa, (d) şikkında incelenen geçişin karakteri değişir. Etkileşimli probleme yaklaşık bir yöntem, karşı-iyonların N_1 'lik bir bölümünün polimer çubuk boyunca yoğunlaşmasına izin vermektir, geri kalan $N_2 = N - N_1$ tanesi ise çözücüde dalgalanır. Serbest karşı-iyonlar yine etkileşmeyen, aşağıdaki Hamiltonyene tabi parçacıklar gibi ele alınır

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \left[\frac{p_i^2}{2m} + 2e^2 n_2 \ln \left(\frac{r_i}{L} \right) \right],$$

burada $n_2 = N_2/L$ 'dir. Etkileşmeyen iyonların dengedeki sayısı N_2^* 'yi tahmin ediniz, ve tahmininizi, sistemin N_2^* 'den küçük sapmalara verdiği tepkiyi tartışarak doğrulayınız. (Bu yeni hesaplamalar gerektirmeyen nitel bir sorudur.)

3. *d* boyutlu Bose gazı: Enerji spektrumu $\epsilon = p^2/2m$ olan, *d* boyutta $V = L^d$ “hacimli” bir kutuya konmuş, etkileşmeyen (spinsiz) bozonların bir gazını düşünelim.

(a) μ kimyasal potansiyelinde büyük potansiyel $\mathcal{G} = -k_B T \ln Q$ ve yoğunluk $n = N/V$ 'yi hesaplayınız. Yanıtınızı *d* ve $f_m^+(z)$ cinsinden ifade ediniz, burada $z = e^{\beta\mu}$ ve

$$f_m^+(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx.$$

(İpucu: $\ln Q$ ifadesinde kısmi integral alımını kullanınız)

(b) PV/E oranını hesaplayınız ve klasik değeriyle karşılaştırınız.

(c) Bose-Einstein yoğuşması için kritik sıcaklık $T_c(n)$ 'yi bulunuz.

(d) Isı kapasitesi $C(T)$ 'yi $T < T_c(n)$ için hesaplayınız.

(e) Isı kapasitesini bütün sıcaklıklar için çiziniz.

(f) Isı sığasının maksimum değerinin klasik limitine oranı, $C_{\max}/C(T \rightarrow \infty)$ 'yi bulunuz ve $d = 3$ için değerini bulunuz.

(g) Yukarıda hesaplanan oran $d \rightarrow 2$ limitinde nasıl davranır? Sonuçlarınız hangi boyutlarda geçerlidir? Açıklayınız.

1. Elektron Manyetizması: Bir metaldeki iletkenlik elektronları spinini $\frac{1}{2}$ (yukarı ve aşağı yozlaşmasıyla), ve yoğunluğu ve $n = N/V$ olan fermiyonların gazı olarak düşünülebilir.

(a) Elektronlar arasındaki etkileşimi göz ardı ederek taban durumlarını sözle anlatınız. Fermi dalga sayısı k_F ve taban durum enerji yoğunluğu E_0/V 'yi yoğunluk n cinsinden hesaplayınız.

Elektronlar ayrıca Coulomb itmesi *üzerinden* etkileştiklerinden konum uzayında antisimetrik bir dalga fonksiyonunu tercih eder, ki bu da onları ayrı tutar. Bu etkileşim fermiyonik dalga fonksiyonlarının tam (konum ve spin) antisimetrisinden dolayı etkin bir spin-spin çiftlenimi olarak tarif edilebilir, ki bu da paralel spinli durumları önerir. Basit bir yaklaşımda, etkileşimin etkisi

$$U = \alpha \frac{N_+ N_-}{V},$$

potansiyel teriminin Hamiltonyene eklenmesiyle gösterilir. Burada N_+ ve $N_- = N - N_+$ yukarı ve aşağı spinli elektronların sayıları ve V ise hacimdir. (α parametresi saçılma uzunluğu a ile $\alpha = 4\pi k^2 a/m$ şeklinde ilişkilidir.) Öğrenmek istediğimiz şey, manyetize olmamış gazın $N_+ = N_- = N/2$ ile hala enerjiyi minimum mu yaptığı yoksa gazın kendiliğinden manyetize mi olduğudur.

(b) Değişen Fermi dalga sayıları k_{F+} ve k_{F-} 'yi yoğunluklar $n_+ = N_+/V$ ve $n_- = N_-/V$ cinsinden ifade ediniz.

(c) Simetrik durumdan küçük sapmalar için, $n_+ = n/2 + \delta$ ve $n_- = n/2 - \delta$, sistemin kinetik enerjisindeki değişimi δ 'nin ikinci derecesine kadar hesaplayınız.

(d) Spin-spin etkileşim yoğunluğunu δ cinsinden ifade ediniz. Öyle bir kritik α_c değeri bulunuz ki $\alpha > \alpha_c$ için elektron gazı toplam enerjisini kendiliğinden bir manyetizasyon geliştirerek düşürebilsin. (Bu *Stoner* kararsızlığı olarak bilinir.)

(e) α 'nın kendiliğinden oluşan manyetizasyonunun davranışını nitel olarak anlatın ve çizerek belirtin.

2. Bozon manyetizması: Spini 1 ve birbiriyle etkileşmeyen bozonlardan oluşan bir gazın Hamiltonyeni aşağıdaki gibidir;

$$\mathcal{H}_1(\vec{p}, s_z) = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \mu_0 s_z B \quad ,$$

burada $\mu_0 = e\hbar/mc$ 'dir ve s_z üç muhtemel değer alabilir (-1, 0, +1). (Yörüngesel $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\vec{A}$ etkisi ihmal edilmiştir).

(a) μ kimyasal potansiyelli bir büyük kanonik toplulukta, dalga sayısı $\vec{k} = \vec{p}/\hbar$ olan tek parçacık durumlarının ortalama doluluk sayıları $\{\langle n_+(\vec{k}) \rangle, \langle n_0(\vec{k}) \rangle, \langle n_-(\vec{k}) \rangle\}$ nedir?

(b) Bozonların s_z değerinin üç muhtemel durumu için ortalama toplam sayıları $\{N_+, N_0, N_-\}$ 'i $f_m^+(z)$ fonksiyonları cinsinden hesaplayınız.

(c) Manyetizasyon ifadesini, $M(T, \mu) = \mu_0(N_+ - N_-)$, yazın, ve küçük B değerleri için sonucu açarak sıfır alan alınganlığını, $\chi(T, \mu) = \partial M / \partial B|_{B=0}$, bulun.

(d) $B = 0$ olduğunda, n 'de ikinci dereceye kadar doğru, yüksek sıcaklık açılımını $z(\beta, n) = e^{\beta\mu}$ için bulun. Bu şekilde $\chi(T, n)$ 'ye yüksek sıcaklıklarda kuantum istatistiğinden ilk düzeltmeyi elde ediniz.

(e) Bose-Einstein yoğuşmasının sıcaklığını, $T_c(n, B = 0)$, bulunuz. Yüksek sıcaklık tarafından $T_c(n)$ 'ye yaklaştığımızda $\chi(T, n)$ 'ye ne olur?

(f) B 'nin küçük sonlu bir değerinde $T < T_c(n)$ için kimyasal potansiyel μ nedir? Hangi tek parçacık durumu makroskopik doluluk sayısına sahiptir?

(g) (f) 'deki sonuçları kullanarak kendiliğinden oluşan manyetizasyonu bulun,

$$\overline{M}(T, n) = \lim_{B \rightarrow 0} M(T, n, B).$$

3. Virial teoremi N (klasik ya da kuantum) parçacıktan oluşan bir sistem için faz uzayının ölçek değişimi gibi kanonik dönüşümler altında değişmez kalmasının bir sonucudur. Sorunun devamında genelleştirilmiş koordinatları ve momentumları ve ($i = 1, \dots, N$) olan N parçacığın Hamiltonyenini $\mathcal{H}(\{\vec{p}_i\}, \{\vec{q}_i\})$ olarak düşününüz.

(a) *Klasik model*: Klasik üleşim fonksiyonunun, $Z \equiv Z[\mathcal{H}]$, ifadesini yazınız ve $\vec{q}_1 \rightarrow \lambda \vec{q}_1$, $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1/\lambda$ değişimi gibi bir çift eşlenik değişkenin yeniden ölçeklendirilmesi altında değişmez olduğunu gösteriniz. Örneğin $Z[\mathcal{H}_\lambda]$ λ 'dan bağımsızdır, ki burada \mathcal{H}_λ yukarıdaki ölçeklendirmeden sonra elde edilen Hamiltonyendir.

(b) *Kuantum mekaniksel model*: Kuantum üleşim fonksiyonunu veren ifadeyi yazınız. $\vec{q}_1 \rightarrow \lambda \vec{q}_1$, $\vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1/\lambda$ dönüşümleri altında bu üleşim fonksiyonunun da değişmez olduğunu gösteriniz. Burada \vec{p}_i ve \vec{q}_i artık kuantum mekaniksel operatörlerdir. (İpucu: zamandan bağımsız Schrödinger denklemiyle başlayın.)

(c) Aşağıdaki biçimde bir Hamiltonyen varsayalım

$$\mathcal{H} = \sum_i \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + V(\{\vec{q}_i\}).$$

$Z[\mathcal{H}_\lambda]$ 'nin λ 'dan bağımsız olduğu sonucunu kullanarak *virial* ilişkisini kanıtlayınız,

$$\left\langle \frac{\vec{p}_1^2}{m} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial V}{\partial \vec{q}_1} \cdot \vec{q}_1 \right\rangle,$$

burada parantezler termal ortalamaları gösterir. (Cevabınızı, muhtemel bir kuantum mekaniksel çıkarım da benzer olduğu için klasik olarak formüle edebilirsiniz.)

(d) Yukarıdaki ilişki bazen uzak galaksilerin kütlelerini tahmin etmek için kullanılır. G-8.333 galaksisinin dış sınırındaki yıldızların $v \approx 200$ km/s hızla hareket ettiği ölçülmüştür. G-8.333 'ün kütlesinin boyutuna oranını sayısal olarak tahmin ediniz.

1. He^3 'ün donması: Düşük sıcaklıklarda basınç uygulanarak He^3 sıvıdan katıya çevrilebilir. Bunun faz sınırının tuhaf bir özelliği ise $(dP/dT)_{erime}$ 'nin 0.3K'den düşük sıcaklıklarda negatif olmasıdır. $[(dP/dT)_{erime} \approx -30 \text{atm}^\circ K^{-1}, T \approx 0.1^\circ K]$. Bu özelliği açıklamak için He^3 'ün katı ve sıvı fazları için basit bir model kullanacağız.

(a) Katı halde, He^3 atomları bir kristal örgü oluştururlar. Her atom 1/2 nükleer spinine sahiptir. Spinler arasındaki etkileşimi göz ardı edersek, spin serbestlik derecesinden dolayı oluşan parçacık başına entropi s_s nedir?

(b) Sıvı He^3 , atom başına 46Å^3 hacimle ideal Fermi gazı olarak modellenir. Kelvin cinsinden Fermi sıcaklığı T_F nedir?

(c) Sıvı He^3 'ün ısı sığası düşük sıcaklıklarda nasıl davranır? C_V 'yi N, T, k_B, T_F cinsinden sayısal bir sabite kadar $T \ll T_F$ durumunda geçerli olacak şekilde ifade edin.

(d) (c) şıkkındaki sonucu kullanarak düşük sıcaklıktaki sıvı için parçacık başına düşen entropi s_ℓ 'yi hesaplayın. $T \ll T_F$ için hangi faz (katı ya da sıvı) daha fazla entropiye sahiptir?

(e) Kimyasal potansiyelleri eşitleyerek ya da başka bir teknikle Clausius-Clapeyron denklemini kanıtlayın: $(dP/dT)_{erime} = (s_\ell - s_s)/(v_\ell - v_s)$, burada v_ℓ ve v_s sırasıyla sıvı ve katı fazlarda parçacık başına düşen hacimlerdir.

(f) Atom başına $v_\ell - v_s = 3 \text{Å}^3$ olduğu deneysel olarak bulunmuştur. Bu bilgiyi ve önceki şıklarda elde edilen sonuçları kullanarak $T \ll T_F$ için $(dP/dT)_{erime}$ 'yi yaklaşık olarak bulunuz.

2. Etkileşmeyen bozonlar: Kimyasal potansiyeli μ olan etkileşmeyen bozonların bir büyük kanonik topluluğunu düşünün. Tek parçacık durumları, bir \vec{q} dalga vektörü ile etiketlenmiştir ve $\mathcal{E}(\vec{q})$ enerjileri vardır.

(a) Tek parçacık durumlarının bir $\{n_{\vec{q}}\}$ doluluk sayıları kümesini bulmanın birleşik olasılığı $P(\{n_{\vec{q}}\})$, fügeniteler $z_{\vec{q}} \equiv \exp[\beta(\mu - \mathcal{E}(\vec{q}))]$ cinsinden nedir?

(b) Belli bir \vec{q} için, karakteristik fonksiyon $\langle \exp[ikn_{\vec{q}}] \rangle$ 'u hesaplayınız.

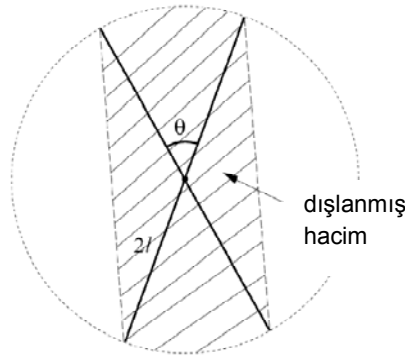
(c) (b) şıkkının sonucunu kullanarak veya başka türlü, doluluk sayısı $n_{\vec{q}}$ 'nin ortalama değeri ve varyansının ifadelerini veriniz.

(d) (c) şıkkındaki varyansı ortalama doluluk sayısı $\langle n_{\vec{q}} \rangle$ cinsinden ifade ediniz.

(e) (a) şıkkındaki yanıtınızı $\{n_{\vec{q}}\}$. doluluk sayıları cinsinden ifade ediniz.

(f) Bozonların olasılık dağılımının entropisini $\{n_{\vec{q}}\}$ cinsinden hesaplayınız ve sıfır sıcaklık limiti üzerine yorum yapınız.

3. Sert çubuklar: İki boyutta, N tane asimetrik molekül topluluğu, herbirinin uzunluğu $2l$ olan ve bir düzlemde uzanan çubuklardan oluşan bir gaz gibi modellenenebilir. Başka bir çubukla karşılaşmadıkça, bir çubuk kütle merkezinin ötelenmesiyle ve eksenini etrafında dönüşüyle hareket edebilir. Sert çekirdek etkileşmesini tam olarak uygulamadan, çubukların dönel hareketinin bir θ açısıyla kısıtlandığını (diğer çubuklar tarafından) varsayarak yaklaşık olarak bu etkileşmeyi hesaba katabiliriz. Bu kısıtlama bir dışlanan hacim $\Omega(\theta)$ getirir (her bir çubuk için). Daha sonra θ 'nın değeri, V toplam ulaşılabilir alan olmak üzere, belli bir $n = N/V$ yoğunluğunda entropiyi maksimize ederek öztutarlı olarak hesaplanır.



(a) Böyle bir çubuklar topluluğunun entropisini, N , n , Ω , ve *tek* bir çubuğun dönel serbestliğiyle ilgili faz uzayı hacmi $A(\theta)$ cinsinden yazınız. (Momentumdan gelen katkıları tamamen göz ardı edebilir ve büyük N limitini alabilirsiniz.)

(b) θ 'nın fonksiyonu olarak entropinin uç değerlerini bulup, yoğunluğu, Ω , A ve onların türevleri olan Ω' , A' ile ilişkilendiriniz; sonucunuzu $n = f(\Omega, A, \Omega', A')$ biçiminde ifade ediniz.

(c) Dışlanmış hacim Ω 'yı θ cinsinden ifade ediniz ve $A \propto \theta$ varsayarak $\theta \in [0, \pi]$ 'nin bir fonksiyonu olarak f 'yi çiziniz.

(d) Yüksek yoğunluklardaki denge durumunu tanımlayınız. Yoğunluk azalırken bir faz geçişi tanımlayabilir misiniz? Çiziminizde ilgili n_c kritik yoğunluğunu gösteriniz. Faz geçişindeki kritik açı θ_c nedir? θ_c 'yi açıkça hesaplamamız gerekmemektedir, ancak onu tanımlayan (kapalı) bir bağıntı veriniz. θ , $n < n_c$ 'de hangi değeri alır?

1. *Helyum 4*: ${}^4\text{He}$ düşük sıcaklıklarda, basınç uygulayarak sıvıdan katıya dönüştürülebilir. Faz sınırının ilginç bir özelliği, erime basıncının $T = 0\text{K}$ 'deki değerinden, 20Nm^{-2} kadar hafifçe düşerek $T = 0.8\text{K}$ 'de minimum değer almasıdır. Bu özelliği açıklamak için ${}^4\text{He}$ 'ün sıvı ve katı fazlarının basit bir modelini kullanacağız.

(a) Kimyasal potansiyeller eşitlenerek ya da herhangi bir teknikle, Clausius-Clapeyron denklemini, $(dP/dT)_{\text{erime}} = (s_\ell - s_s)/(v_\ell - v_s)$, kanıtlayınız. Burada (v_ℓ, s_ℓ) ve (v_s, s_s) sırasıyla sıvı ve katı fazlardaki atom başına düşen hacim ve entropilerdir.

(b) Sıvı ${}^4\text{He}$ 'da $T < 1\text{K}$ için önemli olan uyarımlar c hızındaki fononlardır. Bu modların sıvının parçacık başına düşen ısı sığası C_V^ℓ/N 'ye katkısını hesaplayınız.

(c) Katı ${}^4\text{He}$ 'da düşük sıcaklıkta parçacık başına ısı sığası C_V^s/N 'yi, boyuna ve enine ses hızları c_L ve c_T cinsinden hesaplayınız.

(d) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, tek bir ses hızı $c \approx c_L \approx c_T$, parçacık başına yaklaşık eşit hacimler $v_\ell \approx v_s \approx v$ varsayımlarıyla, entropi farkı $(s_\ell - s_s)$ 'yi hesaplayınız. Hangi faz (katı veya sıvı) daha yüksek entropiye sahiptir?

(e) Küçük bir hacim farkı $\delta v = v_\ell - v_s$ olduğunu varsayarak (sıcaklıktan bağımsız), erime eğrisinin biçimini hesaplayınız. Başta belirtilen anomaliyi açıklamak için hangi fazın (katı veya sıvı) yoğunluğu daha yüksek olmalıdır?

2. *Sürfaktan yoğuşması*: N tane sürfaktan molekülü, bir A alanı içinde su yüzeyine eklenir. İlgili Hamiltonyen şöyledir,

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \mathcal{V}(\vec{r}_i - \vec{r}_j),$$

burada \vec{r}_i ve \vec{p}_i , parçacık i 'nin konum ve momentumunu belirten iki boyutlu vektörlerdir.

(a) $Z(N, T, A)$ üleşim fonksiyonunun ifadesini \vec{r}_i ve \vec{p}_i üzerinden integrallerle yazınız ve momentumlar üzerinden olan integralleri alınız.

Parçacıklar arası potansiyel $\mathcal{V}(\vec{r})$, $|\vec{r}| < a$ için sonsuz, ve $|\vec{r}| > a$ için $\int_a^\infty 2\pi r dr \mathcal{V}(r) = -u_0$ olmak üzere çekicidir.

(b) N tane parçacık sisteminin konumsal faz uzayında mevcut, toplam dışlanmamış alanı tahmin ediniz

(c) *Tekdüze yoğunluk yaklaşımı* $n = N/A$ çerçevesinde, sistemin toplam *potansiyel* enerjisini tahmin ediniz. Bu potansiyel enerjiyi, önceki şıkta izin verilen tüm konfigürasyonlar için kullanarak Z için yaklaşık bir ifade yazınız.

(d) Suyun sürfaktansız yüzey gerilimi σ_0 'dur, ve yaklaşık olarak sıcaklıktan bağımsızdır. Sürfaktanların varlığında yüzey gerilimi $\sigma(n, T)$ 'yi hesaplayınız.

(e) Belli bir T_c sıcaklığının altında σ ifadesinin açıkça yanlışı olduğunu gösterin. Sizce düşük sıcaklıklarda ne olmaktadır?

(f) C_A ısı sığasını hesaplayınız ve açıkça hesaplamadan sürfaktanlardan kaynaklı C_σ için bir ifade yazınız.

3. Dirac Fermiyonları $1/2$ spinli, etkileşmeyen parçacıklardır. Tek parçacık durumları, spinden bağımsız, pozitif ve negatif enerjilerin çiftleri halindedir;

$$\mathcal{E}_\pm(\vec{k}) = \pm \sqrt{m^2 c^4 + \hbar^2 k^2 c^2} ,$$

(a) μ kimyasal potansiyelli *herhangi* bir fermiyonik sistem için, $\mu + \delta$ enerjili dolu bir durumu bulma olasılığının $\mu - \delta$ enerjili boş bir durumu bulma olasılığıyla aynı olduğunu gösteriniz. (δ herhangi bir sabit enerjidir.)

(b) Sıfır sıcaklıkta bütün negatif enerjili Dirac durumları dolu ve bütün pozitif enerjili olanlar boştur, yani $\mu(T = 0) = 0$. (a) şıkkındaki sonucu kullanarak sonlu bir T sıcaklığında kimyasal potansiyeli hesaplayınız.

(c) Sonlu sıcaklıklarda sistemin ortalama uyarılma enerjisinin aşağıdaki denklemi sağladığını gösteriniz;

$$E(T) - E(0) = 4V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta \mathcal{E}_+(\vec{k})) + 1} .$$

(d) (c) şıkkındaki integrali *kütlesiz Dirac parçacıkları* için hesaplayınız (yani $m = 0$).

(e) Kütlesiz Dirac parçacıkları için ısı sığası C_V 'yi hesaplayınız.

(f) Parçacıkların kütleli olması durumunda düşük sıcaklıklarda ısı sığasının nitel bağımlılığını ifade ediniz.

1. *Nötron yıldızının çekirdeği*: Profesör Rajagopal'ın grubu nötron yıldızlarının çekirdeğinde QCD maddesinin yeni bir fazının olabileceğini önerdi. Bu faz, düşük enerjili uyarımları yaklaşık aşağıdaki gibi olan, bir kuark yoğunluğu gibi görülebilir,

$$\mathcal{E}(\vec{k})_{\pm} = \pm \hbar^2 \frac{(|\vec{k}| - k_F)^2}{2M} .$$

Spinden gelen yozlaşma çarpanı $g = 2$ olmak üzere, bu uyarımlar fermiyoniktir.

(a) Sıfır derecede bütün negatif enerjili durumlar dolu ve bütün pozitif enerjili durumlar boştur yani $\mu(T = 0) = 0$ olur. $\mu + \delta$ ve $\mu - \delta$ enerjili durumların doluluk sayılarını ilişkilendirerek, ya da farklı bir yoldan, sonlu bir T sıcaklığındaki kimyasal potansiyeli bulunuz.

(b) $k = k_F$ civarında sabit bir durum yoğunluğu varsayarak yani $q = |\vec{k}| - k_F$ olmak üzere $d^3k \approx 4\pi k_F^2 dq$ alarak, sonlu sıcaklıkta bu sistemin ortalama uyarım enerjisinin şöyle olduğunu gösteriniz:

$$E(T) - E(0) \approx 2gV \frac{k_F^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{\mathcal{E}_+(q)}{\exp(\beta \mathcal{E}_+(q)) + 1} .$$

(c) Yukarıdaki integrali hesaplayarak, uyarım enerjisi için kapalı biçimde bir yanıt veriniz.

(d) Bu sistemin ısı sığası C_V 'yi hesaplayınız ve düşük sıcaklıktaki davranışını yorumlayınız.

2. *Kritik nokta davranışı*: Bir gazın basıncı P , yoğunluğu $n = N/V$ ve sıcaklık T 'ye şu kesilmiş açılımla bağlıdır,

$$P = k_B T n - \frac{b}{2} n^2 + \frac{c}{6} n^3 ,$$

burada b ve c 'nin *pozitif*, sıcaklıktan bağımsız sabitler oldukları varsayılmıştır.

(a) Bu denklemin daha düşük değerlerde geçersiz olmasının gerektiği T_c kritik sıcaklığını ve kritik noktanın ona karşılık gelen n_c yoğunluğu ve P_c basıncını belirleyiniz. Böylece $k_B T_c n_c / P_c$ oranını bulunuz.

(b) Eşitsiz sıkıştırılabilirlik $\kappa_T = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial P} \Big|_T$ 'yi hesaplayınız ve $n = n_c$ için T 'nin fonksiyonu olarak çiziniz.

- (c) Kritik eşisil eğrisinde $(P - P_c)$ için $(n - n_c)$ 'nin bir fonksiyonu olan bir ifade veriniz.
- (d) $T < T_c$ için eşisil eğrilerindeki kararsızlıklar, n_+ yoğunluğunda bir sıvı ve n_- yoğunluğunda bir gaz faz bölünmeyle önlenir. T_c 'ye yakın sıcaklıklarda bu yoğunluklar $n_{\pm} \approx n_c(1 \pm \delta)$ biçiminde davranır. Bir Maxwell yapılanması kullanarak, veya başka yoldan, $\delta(T)$ için kesin bir denklem bulunuz, ve $(T_c - T) \rightarrow 0$ için davranışını belirtiniz. (İpucu: Bir eşisil eğrisi boyunca kimyasal potansiyelin değişimleri $d\mu = dP/n$ 'e uyar.)

3. d boyutlu göreceli Bose gazı: Enerjisi $\varepsilon = c|\vec{p}|$ olan, d boyutta $V = L^d$ "hacimli" bir kutuya konmuş, etkileşmeyen (spinsiz) bozonların bir gazını düşünelim.

(a) Büyük potansiyel $\mathcal{G} = -k_B T \ln \mathcal{Q}$ ve yoğunluk $n = N/V$ 'yi bir μ kimyasal potansiyeli için hesaplayınız. Sonucu d ve $f_m^+(z)$ cinsinden ifade ediniz. Burada $z = e^{\beta\mu}$ ve

$$f_m^+(z) = \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\infty \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx.$$

(İpucu: $\ln \mathcal{Q}$ ifadesi için kısmi integral alma yöntemini kullanınız.)

- (b) Gaz basıncı P ve enerjisi E 'yi hesaplayın ve $E/(PV)$ oranını klasik değeriyle karşılaştırın.
- (c) Geçişin bulunduğu boyutları belirterek, Bose-Einstein yoğuşması için kritik sıcaklık $T_c(n)$ 'yi bulunuz,.
- (d) $T < T_c(n)$ için ısı sığası $C(T)$ 'nin sıcaklık bağımlılığı nedir?
- (e) Boyutsuz ısı sığası $C(T)/(Nk_B)$ 'yi kritik sıcaklıkta $T = T_c$ 'de hesaplayınız ve klasik (yüksek sıcaklık) limitteki değeriyle karşılaştırınız.

1. *Grafın* karbon atomlarının tek bir katmanda birbirine bağlandığı *iki boyutlu* altıgen bir örgüdür. Grafitin katman katman soyulmasıyla elde edilebilir. Grafinin bant yapısında tek parçacık uyarımları göreceli Dirac *fermiyonları* gibi davranır ve düşük enerjilerdeki spektrumu yaklaşık olarak aşağıdaki gibi verilir;

$$\mathcal{E}_{\pm}(\vec{k}) = \pm \hbar v |\vec{k}| \quad .$$

$g = 2$ ile bir spin yozlaşması vardır ve $v \approx 10^6 \text{ ms}^{-1}$ 'dir. Grafinin alışılmadık taşınım özellikleri üzerine yapılan son deneyler *Nature* **438**, 197 (2005)'de rapor edilmiştir. Bu problemde bu malzemenin ısı sığasını hesaplayacaksınız.

(a) Eğer sıfır derece sıcaklıkta tüm negatif enerji durumları dolu ve tüm pozitif enerji durumları boşsa kimyasal potansiyel $\mu(T)$ 'yu hesaplayınız.

(b) Bu sistemin sonlu sıcaklıklarda ortalama uyarılma enerjisinin aşağıdaki denklemi sağladığını gösteriniz;

$$E(T) - E(0) = 4A \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta\mathcal{E}_+(\vec{k})) + 1} \quad .$$

(c) Yukarıdaki integrali hesaplayarak uyarılma enerjisi için kapalı bir cevap bulunuz.

(d) Bu tür kütleli Dirac parçacıkları için ısı sığası C_V 'yi hesaplayınız.

(e) Fononların (örgü titreşimlerinin) grafinin ısı sığasına katkısını nitel olarak açıklayınız. Grafitteki ses hızının $2 \times 10^4 \text{ ms}^{-1}$ düzeyindedir. Grafinin düşük sıcaklık ısı sığası fonon mu yoksa elektron katkıları tarafından mı kontrol edilmektedir?

2. *Kuantum Coulomb gazı*: $V = L^3$ hacimli bir kutuda N tane pozitif ve N tane negatif yüklü göreceli parçacıktan oluşan bir *kuantum* sistemini ele alın. Hamiltonyen aşağıdaki gibidir;

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{2N} c |\vec{p}_i| + \sum_{i < j}^{2N} \frac{e_i e_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad ,$$

burada $i = 1, \dots, N$ ise $e_i = +e_0$, ve $i = N + 1, \dots, 2N$ ise $e_i = -e_0$ parçacıkların yüklerini temsil eder; $\{\vec{r}_i\}$ ve $\{\vec{p}_i\}$ ise ilgili koordinat ve momentlerdir. Bu, çözmek için çok karmaşık bir sistem olmakla beraber yine de bazı kesin sonuçlar elde etmek mümkündür.

- (a) Özdeğerler $\varepsilon_n(L)$ ve özfonksiyonlar (konum uzayında) $\Psi_n(\{\vec{r}\})$ için Schrödinger denklemini yazınız. Parçacıkların bozon ya da fermion olmasına göre $\Psi_n(\{\vec{r}\})$ üzerine uygulanacak kısıtları yazınız.
- (b) $\vec{r}'_i = \vec{r}_i/L$ ölçek değişimiyle özdeğerlerin $\varepsilon_n(L) = \varepsilon_n(1)/L$ ölçek değişimini sağladığını gösteriniz.
- (c) Üleşim fonksiyonu $Z(N, V, T)$ 'nin, özdeğerler $\{\varepsilon_n(L)\}$ cinsinden olan genel biçimini kullanarak Z 'nin T ve V 'ye ayrı ayrı bağlı olmadığını fakat farklı oranlarda özel bir kombinasyonla bağlı olduğunu gösteriniz.
- (d) Gazın E enerjisini ve P basıncını üleşim fonksiyonunun değişimleriyle ilişkilendiriniz. $E = 3PV$ kesin sonucunu kanıtlayınız.
- (e) d boyutlu bir uzayda Coulomb etkileşmesi uzaklıkla $e_i e_j / |\vec{r}_i - \vec{r}_j|^{d-2}$ ($d = 2$ 'de logaritmik bir etkileşim vardır.) Hangi d boyutunda *göreceli olmayan* parçacıklar için E ve P arasında kesin bir ilişki kurabilirsiniz (kinetik enerji $\sum_i \vec{p}_i^2 / 2m$)? Enerji ve basınç için karşılık gelen kesin ilişki nasıldır?
- (f) Yukarıdaki 'kesin' ölçekleme yasasının neden yoğun (sıvı ya da katı) Colulomb karışımlarında geçerli olması beklenmez?

3. Etkileşmeyen Fermiyonlar. μ kimyasal potansiyelli etkileşmeyen *fermiyonlardan* oluşan bir büyük kanonik topluluk düşünün. Tek parçacık durumları \vec{k} dalga vektörüyle etiketlenmiştir ve $\mathcal{E}(\vec{k})$ enerjileri vardır.

- (a) Tek parçacık durumlarının doluluk sayılarının bir kümesi $\{n_{\vec{k}}\}$ 'yi bulmanın birleşik olasılığı $P(\{n_{\vec{q}}\})$ nedir?
- (b) (a) şıkındaki cevabınızı ortalama doluluk sayıları $\{\langle n_{\vec{k}} \rangle\}$ cinsinden ifade ediniz.
- (c) Bir rassal değişkenin, $n = 1, 2, \dots, \ell$ olmak üzere, p_n olasılıklarına sahip ℓ tane ayrık sonucu vardır. Bu olasılık dağılımının entropisi nedir? Olası en büyük entropi değeri nedir?
- (d) (b) şıkındaki fermiyon doluluk sayıları için olasılık dağılımının entropisini hesaplayınız ve sıfır sıcaklık limitinde yorumlayınız.
- (e) Toplam parçacık sayısının varyansı $\langle N^2 \rangle_c$ 'yi hesaplayınız ve sıfır sıcaklıktaki davranışı hakkında yorum yapınız.
- (f) Bir gazın sayı dalgalanmaları sıkıştırılabilirliği κ_T ve sayı yoğunluğu $n = N/V$ ile şu şekilde ilişkilidir,

$$\langle N^2 \rangle_c = N n k_B T \kappa_T \quad .$$

$T = 0$ sıcaklığındaki bir fermi gazının sıkıştırılabilirliği için $\text{Å}^3 eV^{-1}$ cinsinden *tahmini sayısal* bir değer veriniz.

8.333: İstatistiksel Mekanik I**Güz 2006****Final Sınavı**

- 1. He^4 'ün donması:** 4He düşük sıcaklıklarda basınç uygulanarak katıdan sıvıya dönüştürülebilir. Faz sınırının ilginç bir özelliği, erime basıncının $T = 0 K$ 'deki değerinden, $20Nm^{-2}$ kadar hafifçe düşerek $T = 0.8 K$ 'de minimum değer almasıdır. Bu özelliği açıklamak için 4He 'ün sıvı ve katı fazlarının basit bir modelini kullanacağız.
- (a) Kimyasal potansiyelleri eşitleyerek ya da başka herhangi bir teknikle, Clausius-Clapeyron denklemi $(dP/dT)_{erime} = (s_\ell - s_s)/(v_\ell - v_s)$ 'ni kanıtlayınız. Burada (v_ℓ, s_ℓ) ve (v_s, s_s) sıvı ve katı fazlardaki atom başına düşen hacim ve entropilerdir.
- (b) Sıvı 4He 'da $T < 1^oK$ için önemli olan uyarımlar c hızlı fononlardır. Bu modların sıvının parçacık başına düşen ısı sığası C_V^L/N 'ye katkısını hesaplayınız.
- (c) Katı 4He 'da düşük sıcaklıkta parçacık başına ısı sığası C_V^S/N 'yi, boyuna ve enine ses hızları c_L ve c_T cinsinden hesaplayınız.
- (d) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, tek bir ses hızı $c \approx c_L \approx c_T$, parçacık başına yaklaşık eşit hacimler $v_\ell \approx v_s \approx v$ varsayımlarıyla, entropi farkı $(s_\ell - s_s)$ 'yi hesaplayınız. Hangi faz (katı veya sıvı) daha yüksek entropiye sahiptir?
- (e) Küçük bir hacim farkı $\delta v = v_\ell - v_s$ olduğunu varsayarak (sıcaklıktan bağımsız), erime eğrisinin biçimini hesaplayınız. Başta belirtilen anomaliyi açıklamak için hangi fazın (katı veya sıvı) yoğunluğu daha yüksek olmalıdır?

2. Sıkıştırılmış zincir: Bir lastik şerit N tane, sabit a uzunluğunda *kütle*siz çubuğun tek zinciri olarak modellenilebilir. Bu zincir dar bir boruya konulduğunda her çubuk boruya paralel ya da anti-paralel yönelimle kısıtlanmış olur.

- (a) Çubuklar arası etkileşimler ihmal edilirse, L zincirin uçtan uca uzunluğu olmak üzere, zincirin konfigürasyon sayısı $\Omega(L, N)$ nedir?
- (b), Entropi sonucunu N ve $x = L/(Na)$ 'in fonksiyonu olarak ifade etmek için Stirling yaklaşıklığını kullanınız.

Şimdi, boru düzgün bir şekilde sıkıştırılmıştır ve gerilmiş konfigürasyonlar enerji açısından tercih edilmektedir. Bu problem için, yerel çubuk yoğunluğuna ters olarak bağlı bu enerjinin basit bir biçimini varsayınız; düzgünce gerilmiş bir durumun enerjisi,

$$E(L, N) = -\frac{\sigma}{2}L \times \frac{L}{N} = -\frac{\sigma a^2}{2}Nx^2.$$

(Problemin geri kalanında, L ve N 'si verili tüm durumların enerjisi için bu formülü kullanınız.)

(c) Serbest enerji $F(T, L, N)$ 'yi, ve zincirin uç noktalarına etkiyen kuvvet $J(T, L, N)$ 'yi bulunuz. (Zinciri uzatmak için yapılan iş $dW = JdL$)

(d) Eşısıll eğrileri $J(x, T)$ 'yi yüksek ve düşük sıcaklıklarda çiziniz ve davranışın değiştiği sıcaklık T_c 'yi belirleyiniz.

(e) Zincirin kararlılığı için koşul nedir? Yukarıdaki eşısıll eğrilerinin hangi kısmı doğal olarak dengesizdir?

(f) (c) şıkkında J için elde edilen ifadeyi kullanarak, T T_c 'ye aşağıdan yaklaşırken geçerli olan, kuvvet uygulanmamış ($J = 0$) zincir uzunluğu için bir ifade bulunuz.

3. Grafın çifttabakası: Grafitin tabakaları farklı ayırma işlemleriyle soyulabilir. Bu tarz birçok işlem, karbon atomlarının tek yapraklarını, ve bunun yanında iki yaprağın zayıfça bağlandığı çifttabakaları oluşturur. Tek tabaka grafının altıgen örgüsü, düşük enerjilerde, göreceli Dirac fermiyonlarına benzer şekilde $\mathcal{E}_{\pm}^{1 \text{ layer}}(\vec{k}) = \pm t_{\parallel}(ak)$ ile yaklaşık ifade edilebilen bir bant yapısına yolaçar. (Burada $k = |\vec{k}|$, a bir örgü uzaklığı, ve t_{\parallel} tipik düzlem-içi hoplama enerjisidir.) Çifttabakanın iki yaprağı arasındaki zayıf bir hoplama enerjisi t_{\perp} düşük enerjili uyarımları önemli biçimde şöyle değiştirir,

$$\mathcal{E}_{\pm}^{\text{bilayer}}(\vec{k}) = \pm \frac{t_{\parallel}^2}{2t_{\perp}}(ka)^2, \quad ,$$

yani kütleli Dirac fermiyonlarına benzetir. Spin yozlaşmasının yanında, birim hücre başına bu tip iki dal olduğundan toplam yozlaşma sayısı $g = 4$ 'tür.

(a) Katkılanmamış, konum başına bir elektron içeren malzemede, sıfır sıcaklıkta tüm negatif enerjili durumlar dolu ve tüm pozitif enerjililer boştur. Kimyasal potansiyel $\mu(T)$ 'yi hesaplayınız.

(b) Sonlu sıcaklıkta bu sistemin ortalama uyarım enerjisinin şöyle olduğunu gösteriniz:

$$E(T) - E(0) = 2gA \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta\mathcal{E}_+(\vec{k})) + 1} .$$

(c) Çifttabakanın uyarım enerjisi için yukarıdaki integrali hesaplayarak kapalı bir cevap bulunuz

(d) Kütleli Dirac parçacıkları için ısı sığası C_A 'yi hesaplayınız.

(e) Bir örnekte tek ve iki katmanlılardan eşit oranda bulunmaktadır. Hangi sıcaklıktan düşük değerlerde iki katmanlının ısı sığasında baskın duruma geçtiğini (hoplama enerjileri cinsinden) tahmin ediniz.
