

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocw.mit.edu>

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Şartları hakkında bilgi almak için <http://ocw.mit.edu/terms> ve <http://tuba.acikders.org.tr> sitesini ziyaret ediniz.

**8.333: İstatistiksel Mekanik I Problem Seti # 6 Son Tarih: 07/12/07 @ gece yarısı!**
**İdeal Kuantum Gazları**

1. *Sayısal kestirimler:* Aşağıdaki tablo bazı sistemlerde Fermi enerjisi ve Fermi sıcaklığı için tipik değerleri vermektedir: (i) Tipik bir metaldeki elektronlar, (ii) Ağır bir çekirdekdeki nükleonlar ve (iii) Sıvı He<sup>3</sup> içindeki He<sup>3</sup> atomları (atomik hacim = 46.2 Å<sup>3</sup>/atom)

	$n(1/m^3)$	$m(\text{Kg})$	$\varepsilon_F(\text{eV})$	$T_F(\text{K})$
elektron	$10^{29}$	$9 \times 10^{-31}$	4.4	$5 \times 10^4$
nükleon	$10^{44}$	$1.6 \times 10^{-27}$	$1.0 \times 10^8$	$1.1 \times 10^{12}$
sıvı He <sup>3</sup>	$2.6 \times 10^{28}$	$4.6 \times 10^{-27}$	$\times 10^{-3}$	$10^1$

(a) Tipik bir metalde, oda sıcaklığında elektron ve fonon ısı sığalarının oranını tahmin ediniz.

(b) Oda sıcaklığındaki bir nötronun termal dalga boyu ile tipik bir kristaldeki bir fononun minimum dalga boyunu karşılaştırınız.

(c) Oda sıcaklığı ve basıncındaki hidrojen, helyum ve oksijen gazları için yozlaşma ayırtacını,  $n\lambda^3$ , tahmini hesaplayınız. Bu gazlar için hangi sıcaklıklarda kuantum mekaniksel etkiler önem kazanır?

(d) He<sup>4</sup> ile yapılan deneyler, 1K altındaki sıcaklıklarda ısı sığasının  $C_V = 20.4T^3 \text{JKg}^{-1}\text{K}^{-1}$  ile verildiğini göstermektedir. He<sup>4</sup>'ün düşük enerjili uyarım spektrumu  $\mathcal{E}(k)$ 'yi bulunuz. (İpucu: Bu tarz uyarımların sadece bir yozlaşmamış dalı vardır.)

\*\*\*\*\*

2. *Güneşin içi:* Astrofizik verilerine göre, güneşin merkezindeki plazma şu özelliklere sahiptir:

Sıcaklık:  $T = 1.6 \times 10^7 \text{K}$

Hidrojen yoğunluğu:  $\rho_H = 6 \times 10^4 \text{kg m}^{-3}$

Helyum yoğunluğu:  $\rho_{He} = 1 \times 10^5 \text{kg m}^{-3}$ .

(a) Elektron, proton ve  $\alpha$ -parçacıkları (He çekirdeği) için termal dalga boylarını elde ediniz.

(b) Gazın ideal olduğunu varsayarak, elektron, proton veya  $\alpha$ -parçacık gazlarının kuantum mekaniksel anlamda yozlaşmış olup olmadığını belirleyiniz.

(c) Bu gaz parçacıklarının toplam basıncını, güneşin merkezi yakınlarında tahmini hesaplayınız.

(d) Güneşin merkezi yakınlarındaki toplam ışımaya basıncını tahmin ediniz. Güneşin kütleçekimsel çöküşünü önleyen, madde basıncı mıdır yoksa radyasyon basıncı mıdır?

\*\*\*\*\*

**3. Bir yarıiletkende eksiton ayrışması:** Bir yarıiletken üzerine yoğun bir lazer ışını göndermek, yığında, elektron ( $-e$  yüklü ve  $m_e$  etkin kütleli) ve boşlukların ( $+e$  yüklü ve  $m_h$  etkin kütleli) yarıkarakarlı bir topluluğunu oluşturabilir. Zıt yüklü parçacıklar (bir hidrojen atomunda olduğu gibi) çiftlenerek bir *eksiton* gazı, veya ayrışıp bir plazma oluşturabilir. Bu işlemin çok daha basitleştirilmiş bir modelini inceleyeceğiz.

(a)  $m_e$  ve  $m_h$  kütleli, etkileşmeyen klasik parçacıklar gibi ele alarak,  $T$  sıcaklığında  $N_e$  tane elektron ve  $N_h$  tane boşluktan oluşan bir gazın serbest enerjisini hesaplayınız.

(b) Bir eksiton oluşturan elektron boşluk çifti enerjisini  $\varepsilon$  kadar düşürür. [Hidrojen benzeri bir eksitonun bağlanma enerjisi,  $\varepsilon$  dielektrik sabiti ve  $m^{-1} = m_e^{-1} + m_h^{-1}$  iken,  $\varepsilon \approx me^4/(2\hbar^2\epsilon^2)$ 'dir.]  $m = m_e + m_h$  kütleli, etkileşmeyen klasik parçacıklar gibi ele alarak,  $N_p$  tane eksitondan oluşan bir gazın serbest enerjisini hesaplayınız.

(c) Elektron, boşluk ve eksiton durumlarının, sırasıyla,  $\mu_e$ ,  $\mu_h$ , ve  $\mu_p$  kimyasal potansiyellerini hesaplayınız.

(d) Eksitonlar ve elektron/boşluklar arasındaki denge koşulunu, kimyasal potansiyelleri cinsinden ifade ediniz.

(e) Yüksek bir  $T$  sıcaklığında, eksitonların  $n_p$  yoğunluğunu, uyarımların  $n \approx n_e + n_h$  toplam yoğunluğunun bir fonksiyonu olarak bulunuz.

\*\*\*\*\*

**4. Etkileşmeyen bozonlar:** Kimyasal potansiyeli  $\mu$  olan etkileşmeyen bozonların bir büyük kanonik topluluğunu düşünün. Tek parçacık durumları, bir  $\vec{q}$  dalga vektörü ile etiketlenmiştir ve  $\mathcal{E}(\vec{q})$  enerjileri vardır.

(a) Tek parçacık durumlarının bir  $\{n_{\vec{q}}\}$  doluluk sayıları kümesini bulmanın birleşik olasılığı  $P(\{n_{\vec{q}}\})$ , fügenasiteler  $z_{\vec{q}} \equiv \exp[\beta(\mu - \mathcal{E}(\vec{q}))]$  cinsinden nedir?

(b) Belli bir  $\vec{q}$  için, karakteristik fonksiyon  $\langle \exp[ikn_{\vec{q}}] \rangle$ 'u hesaplayınız.

(c) (b) şıkkının sonucunu kullanarak **veya başka türlü**, doluluk sayısı  $n_{\vec{q}}$ 'nun ortalama değer ve varyansının ifadelerini veriniz.

(d) (c) şıkkındaki varyansı ortalama doluluk sayısı  $\langle n_{\vec{q}} \rangle$  cinsinden ifade ediniz.

(e) (a) şıkkındaki yanıtınızı  $\{n_{\vec{q}}\}$ . doluluk sayıları cinsinden ifade ediniz.

(f) Bozonların olasılık dağılımının entropisini  $\{n_{\vec{q}}\}$  cinsinden hesaplayınız ve sıfır sıcaklık limiti üzerine yorum yapınız.

\*\*\*\*\*

**5. Grafın çifttabakası:** Grafitin tabakaları farklı ayırma işlemleriyle soyulabilir. Bu tarz birçok işlem, karbon atomlarının tek yapraklarını, ve bunun yanında iki yaprağın zayıfça bağlandığı çifttabakaları oluşturur. Tek tabaka grafinin altıgen örgüsü, düşük enerjilerde, göreceli Dirac fermiyonlarına benzer şekilde  $\mathcal{E}_{\pm}^{1\text{ tabaka}}(\vec{k}) = \pm t_{\parallel}(ak)$  ile yaklaşık ifade edilebilen bir bant yapısına yolaçar. (Burada  $k = |\vec{k}|$ ,  $a$  bir örgü uzaklığı, ve  $t_{\parallel}$  tipik düzlem-içi hoplama enerjisidir.) Çifttabakanın iki yaprağı arasındaki zayıf bir hoplama enerjisi  $t_{\perp}$ , düşük enerjili uyarımları önemli biçimde şöyle değiştirir,

$$\mathcal{E}_{\pm}^{\text{çifttabaka}}(\vec{k}) = \pm \frac{t_{\parallel}^2}{2t_{\perp}}(ka)^2,$$

yani kütleli Dirac fermiyonlarına benzetir. Spin yozlaşmasının yanında, birim hücre başına bu tip iki dal olduğundan toplam yozlaşma sayısı  $g = 4$ 'tür.

(a) Katkılanmamış, konum başına bir elektron içeren malzemede, sıfır sıcaklıkta tüm negatif enerjili durumlar dolu ve tüm pozitif enerjililer boştur. Kimyasal potansiyel  $\mu(T)$ 'yi hesaplayınız.

(b) Bu sistemin ortalama uyarım enerjisinin sonlu sıcaklıklarda şunu sağladığını gösteriniz:

$$E(T) - E(0) = 2gA \int \frac{d^2\vec{k}}{(2\pi)^2} \frac{\mathcal{E}_+(\vec{k})}{\exp(\beta\mathcal{E}_+(\vec{k}))+1}.$$

(c) Yukarıdaki integrali hesaplayarak, çifttabakanın uyarım enerjisi için kapalı biçimde bir yanıt veriniz.

(d) Bu tip kütleli Dirac parçacıklarının ısı sığası  $C_A$ 'yı hesaplayınız.

(e) Bir örnek, eşit oranda tek ve çifttabaka grafın içermektedir. Daha düşük değerlerde elektronik ısı sığasında çifttabakaların baskın hale geldiği sıcaklığı (hoplama enerjileri cinsinden) tahmin ediniz.

(f) Fononların (örgü titreşimleri) grafının ısı sığasına katkısını niteliksel olarak açıklayınız. Grafitte tipik ses hızı  $2 \times 10^4 \text{ms}^{-1}$  mertebesindedir. (Tek tabaka) grafının düşük sıcaklık ısı sığasında fononun mu yoksa elektronun mu katkısı hakimdir?

\*\*\*\*\*

**6. Nötron yıldızının çekirdeği:** MIT'den Profesör Rajagopal'ın grubu, nötron yıldızlarının çekirdeğinde QCD maddenin yeni bir fazının bulunabileceğini önerdi. Bu faz, düşük enerjili uyarımları yaklaşık aşağıdaki gibi olan, bir kuark yoğunluğu gibi görülebilir,

$$\mathcal{E}(\vec{k})_{\pm} = \pm \hbar^2 \frac{(|\vec{k}| - k_F)^2}{2M}$$

Spinden gelen yozlaşma çarpanı  $g = 2$  olmak üzere, bu uyarımlar fermiyoniktir.

(a)  $k = k_F$  civarında sabit bir durum yoğunluğu varsayarak, yani  $q = |\vec{k}| - k_F$  olmak üzere  $d^3k \approx 4\pi k_F^2 dq$  alarak, sonlu sıcaklıkta bu sistemin ortalama uyarım enerjisinin şöyle olduğunu gösteriniz:

$$E(T) - E(0) \approx 2gV \frac{k_F^2}{\pi^2} \int_0^{\infty} dq \frac{\mathcal{E}_+(q)}{\exp(\beta \mathcal{E}_+(q)) + 1} .$$

(b) Yukarıdaki integrali hesaplayarak, uyarım enerjisi için kapalı biçimde bir yanıt veriniz.

(c) Bu sistemin ısı sığası  $C_V$ 'yi hesaplayınız ve düşük sıcaklıktaki davranışını yorumlayınız.

\*\*\*\*\*

**7. (İsteğe bağlı)  $d$ -boyutta Bose yoğunlaşması:** Enerji spektrumu  $\epsilon = p^2/2m$  olan,  $d$  boyutta  $V = L^d$  "hacimli" bir kutuya konmuş, etkileşmeyen (spinsiz) bozonların bir gazını düşünelim.

(a)  $\mu$  kimyasal potansiyelinde büyük potansiyel  $\mathcal{G} = -k_B T \ln \mathcal{Q}$  ve yoğunluk  $n = N/V$ 'yi hesaplayınız. Yanıtınızı  $d$  ve  $f_m^+(z)$  cinsinden ifade ediniz, burada  $z = e^{\beta\mu}$  ve

$$f_m^+(z) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{z^{-1}e^x - 1} dx.$$

(İpucu:  $\ln \mathcal{Q}$  ifadesinde kısmi integral alımını kullanınız)

(b)  $PV/E$  oranını hesaplayınız ve klasik değeriyle karşılaştırınız.

(c) Bose-Einstein yoğunlaşması için kritik sıcaklık  $T_c(n)$ 'yi bulunuz.

(d)  $T < T_c(n)$  için ısı sığası  $C(T)$ 'yi hesaplayınız.

(e) Isı sığasını tüm sıcaklıklar için çiziniz.

(f) Isı sığasının maksimum değerinin klasik limitine oranı,  $C_{\max}/C(T \rightarrow \infty)$ 'yi bulunuz ve  $d = 3$  için değerini bulunuz.

(g) Yukarıda hesaplanan oran  $d \rightarrow 2$  limitinde nasıl davranır? Sonuçlarınız hangi boyutlarda geçerlidir? Açıklayınız.

\*\*\*\*\*

- 8. (İsteğe bağlı)  ${}^4\text{He}$ 'un donması:** Düşük sıcaklıklarda, basınç uygulayarak sıvıdan katıya dönüştürülebilir. Faz sınırının ilginç bir özelliği, erime basıncının  $T = 0K$ 'deki değerinden,  $20\text{Nm}^{-2}$  kadar hafifçe düşerek  $T = 0.8K$ 'de minimum değer almasıdır. Bu özelliği açıklamak için  ${}^4\text{He}$ 'ün sıvı ve katı fazlarının basit bir modelini kullanacağız.
- (a) Sıvı  ${}^4\text{He}$ 'da  $T < 1K$  için önemli olan uyarımlar  $c$  hızındaki fononlardır. Bu modların sıvının parçacık başına düşen ısı sığası  $C_V^l/N$ 'ye katkısını hesaplayınız.
- (b) Katı  ${}^4\text{He}$ 'da düşük sıcaklıkta parçacık başına ısı sığası  $C_V^s/N$ 'yi, boyuna ve enine ses hızları  $c_L$  ve  $c_T$  cinsinden hesaplayınız.
- (c) Yukarıdaki sonuçları kullanarak, tek bir ses hızı  $c \approx c_L \approx c_T$ , parçacık başına yaklaşık eşit hacimler  $v_l \approx v_s \approx v$  varsayımlarıyla, entropi farkı  $(s_l - s_s)$ 'yi hesaplayınız. Hangi faz (katı veya sıvı) daha yüksek entropiye sahiptir?
- (d) Küçük bir hacim farkı  $\delta v = v_l - v_s$  olduğunu varsayarak (sıcaklıktan bağımsız), erime eğrisinin biçimini hesaplayınız. Başta belirtilen anormalliği açıklamak için hangi fazın (katı veya sıvı) yoğunluğu daha yüksek olmalıdır?

\*\*\*\*\*