MIT Açık Ders Malzemeleri

http://ocw.mit.edu

8.333 İstatistiksel Mekanik I: Parçacıkların İstatistiksel Mekaniği

2007 Güz

8.333: İstatistiksel Mekanik I **Problem Seti #3** Son Tarih: 22/10/07

Kinetik Teori

1. *Sıfırıncı derece Hidrodinamik* : Çarpışmalarda parçacık sayısı, momentum ve enerjinin korunumundan ortaya çıkan hidrodinamik denklemleri (bir tekdüze kutuda) şunlardır:

$$\begin{cases} \partial_t n + \partial_\alpha (n u_\alpha) = 0 \\ \partial_t u_\alpha + u_\beta \partial_\beta u_\alpha = -\dfrac{1}{mn} \partial_\beta P_{\alpha\beta} \\ \partial_t \varepsilon + u_\alpha \partial_\alpha \varepsilon = -\dfrac{1}{n} \partial_\alpha h_\alpha - \dfrac{1}{n} P_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} \end{cases}$$

burada n yerel yoğunluk, $\vec{u} = \langle \vec{p}/m \rangle$, $u_{\alpha\beta} = (\partial_\alpha u_\beta + \partial_\beta u_\alpha)/2$, ve $\varepsilon = \{mc^2/2\}$, içinde $\vec{c} = \vec{p}/m - \vec{u}$.

(a) Sıfırıncı derece yoğunluk,

$$f_1^0\ (\vec{p}, \vec{q},\ t) = \frac{n(\vec{q},t)}{(2\pi m k_B T(\vec{q},t))^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\vec{p} - m\vec{u}(\vec{q},t))^2}{2mk_B T(\vec{q},t)}\right],$$

için, basınç tensörü $P_{\alpha\beta}^0 = mn\langle c_\alpha c_\beta \rangle^0$, ve ısı akısı $h_\alpha^0 = nm\{c_\alpha c^2/2\}^0$ 'ı hesaplayınız.

(b) $(\vec{q},\ t)$, $\vec{u}(\vec{q},t)$, ve $T(\vec{q},t)$'nin evrimini belirleyen sıfırıncı derece hidrodinamik denklemlerini elde ediniz.

(c) Yukarıdaki denklemlerin $D_t \ln(nT^{-3/2}) = 0$ olması gerektirdiğini gösteriniz, burada $D_t = \partial_t + u_\beta \partial_\beta$ akıçizgileri boyunca maddi türevdir.

(d) $\mathrm{H}^0(t) = \int d^3\vec{q} d^3\vec{p} f_1^0(\vec{p},\vec{q},t) \ln f_1^0(\vec{p},\vec{q},t)$ fonksiyonunun, $\vec{p}$ üzerinden integralleri aldıktan sonra, $n(\vec{q},t)$, $\vec{u}(\vec{q},t)$, ve $T(\vec{q},t)$ cinsinden ifadesini yazınız.

(b)'deki hidrodinamik denklemleri kullanarak $d\mathrm{H}^0/dt$'yi hesaplayınız.

(f) Dengeye gidişte (e)'deki sonucun gerektirdiklerini tartışınız.

****

2. *Viscosity*: Aralarında w mesafesi olan iki tabaka arasında bir klasik gaz düşünün. Tabakalardan biri $y = 0$'da durağan, $y = w$'daki diğeri ise sabit $v_x = u$ hızı ile hareket etmektedir. Tek parçacık yoğunluğuna sıfırıncı derece bir yaklaşım şöyledir,

$$f_1^0(\vec{p},\vec{q}) = \frac{n}{(2\pi m k_B T)^{3/2}} \exp\left[-\frac{1}{2mk_B T}((p_x - m\alpha y)^2 + p_y^2 + p_z^2)\right].$$

Bu ifade, *tekdüze* Maxwell-Boltzmann dağılımından, her bir noktada ortalama hız değerini yerleştirerek elde edilmiştir. ($\alpha = u/w$ hızın gradientidir.)

(a) Yukarıdaki yaklaşık ifade, $df_1^0/dt \neq 0$ olduğu halde çarpışma terimi yok olduğundan, Boltzmann denklemini sağlamaz. Boltzmann denklemini, tek çarpışma zamanı yaklaşımıyla aşağıdaki biçimde doğrusallaştırarak, daha iyi bir yaklaşıklık $f_1^1(\vec{p})$'i bulunuz,

$$\mathcal{L}[f_1^1] \approx [\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{q}}] f_1^0 \approx -\frac{f_1^1 - f_1^0}{\tau_\times},$$

burada $\tau_\times$ çarpışmalar arası karakteristik ortalama zamandır.

(b) y'deki bir düzlemden birim alan ve birim zamanda geçen parçacıkların momentumlarının x bileşenlerinin net transferi Π_{xy}'yi hesaplayınız.

(c) (b) şıkkındaki cevabın, gazın her bir tabakaya uyguladığı bir tekdüze yanal kuvvet $F_x = -\Pi_{xy}$'yi belirtecek şekilde, y'den bağımsız olduğuna dikkat ediniz. $\eta = F_x/\alpha$ ile tanımlanan vizkozite katsayısını bulunuz.

****

3. *Işık ve madde*: Bu problemde, atomlar ve ışıma arasındaki dengeyi incelemek için kinetik teoriyi kullanacağız.

(a) Atomların ya taban durumları a_0, ya da daha yüksek ε enerjili bir uyarılmış durum a_1'de bulunduklarını varsayalım. Atomları, N tane sabit, toplam enerjisi E olan, iki-durumlu sistemler topluluğu olarak düşünüp (yani koordinat ve momentumlarını gözardı ederek), sıcaklık T'nin bir fonksiyonu olarak iki durumdaki atomların yoğunluklarının oranı n_1/n_0'ı hesaplayınız.

Frekansı $\omega = \varepsilon/\hbar$ ve momentumu $|\vec{p}| = \hbar\omega/c$ olan, aşağıdaki işlemler yoluyla atomlarla etkileşebilen γ fotonlarını ele alalım.

(i) *Kendiliğinden ışıma*: $a_1 \to a_0 + \gamma$.

(ii) *Soğurma*: $a_0 + \gamma \to a_1$.

(iii) *Uyarılmış ışıma*: $a_1 + \gamma \to a_0 + \gamma + \gamma$.

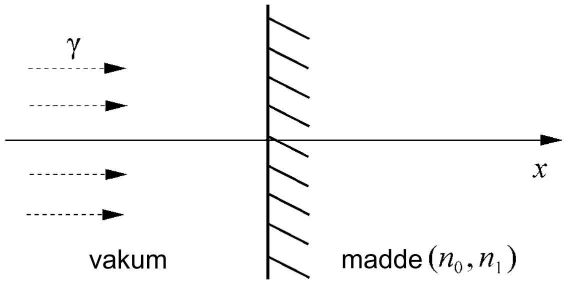
Kendiliğinden ışımanın σ_{sp} olasılığıyla gerçekleştiğini, ve soğurma ile uyarılmış ışımanın sabit (açıdan bağımsız) diferensiyel kesit alanlarının sırasıyla $\sigma_{ad}/4\pi$ ve $\sigma_{st}/4\pi$ olduğunu varsayalım.

(b) Atomları n_0 ve n_1 yoğunluğunda sabit saçılma merkezleri olarak alıp, foton gazının yoğunluğu f'yi tanımlayan Boltzmann denklemini yazınız.

(c) Yukarıdaki frekansa sahip fotonların denge yoğunluğu f_{eq}'yi bulunuz.

(d) Planck yasasına göre, bir T sıcaklığında fotonların yoğunluğu, frekansları ω'ya $f_{eq} = [\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1]^{-1}/h^3$ biçiminde bağlıdır. Bu, yukarıdaki kesit alanları için ne gerektirir?

(e) Şekilde çizildiği gibi, sınırı $x = 0$ düzlemiyle çakışık bir grup atom üzerine, x ekseni doğultusunda ışık gönderildiği bir durum düşünelim.



Açıkça, f x'e (ve p_x'e) bağlı, ama y ve z'den bağımsız olacaktır. (b) şıkkında önerdiğiniz Boltzmann denklemini, $\vec{p} = \hbar\omega\hat{x}/c$ momentumlu fotonların tekdüze gelen akısı durumuna uyarlayınız. Gelen akının azalışını belirten *giriş uzunluğu* nedir?

****

4. *Denge yoğunluğu*: Bir dış potansiyel $U(\vec{q})$ içinde m kütleli N tane parçacık içeren bir gaz ele alalım. Tek parçacık yoğunluğu $\rho_1(\vec{p}, \vec{q}, t)$'in Boltzmann denklemini sağladığını varsayalım. Durağan bir çözüm, yani $\partial\rho_1/\partial t = 0$ için, Liouville teoremine göre ρ_1'in $\rho_1 \propto \exp[-\beta(p^2/2m + U(\vec{q}))]$ biçiminde olması yeterlidir. H-teoremini kullanarak, bunun aynı zamanda gerek şart olduğunu, aşağıdaki biçimde ispatlayınız.

(a) Toplam enerji $E = \langle\mathcal{H}\rangle$'nin sabit olması kısıtına bağlı kalarak $H = N\int d^3\vec{p}d^3\vec{q}\rho_1(\vec{p}, \vec{q}) \ln\rho_1(\vec{p}, \vec{q})$'i minimize eden $\rho_1(\vec{p}, \vec{q})$'i bulunuz. (İpucu: Kısıtı zorlamak için Lagrange çarpanları yöntemini kullanın.)

(b) İki gazlı bir karışımda (m_a ve m_b kütleli parçacıklar) sabit toplam enerji kısıtı altında $\mathrm{H} = \mathrm{H}^{(a)} + \mathrm{H}^{(b)}$'yi minimize eden $\rho_1^{(a)}$ ve $\rho_1^{(b)}$ dağılımlarını bulunuz.

****

2. Sınava hazırlık için dersin web-sayfasında verilen problem ve çözümlerin gözden geçirilmesi, yukarıdaki problemlerde size yardımcı olacaktır.