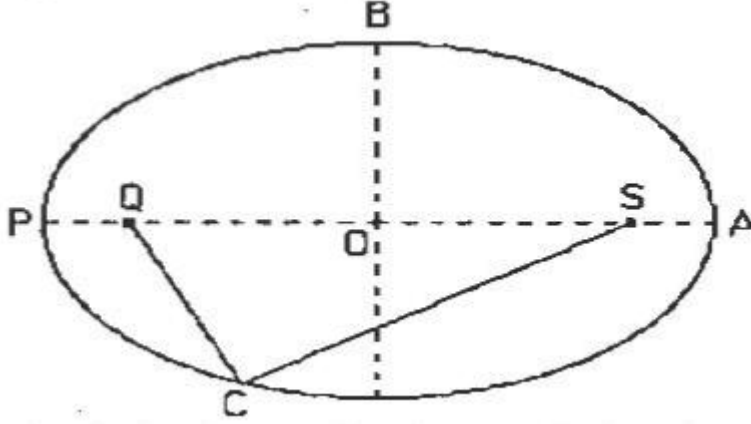


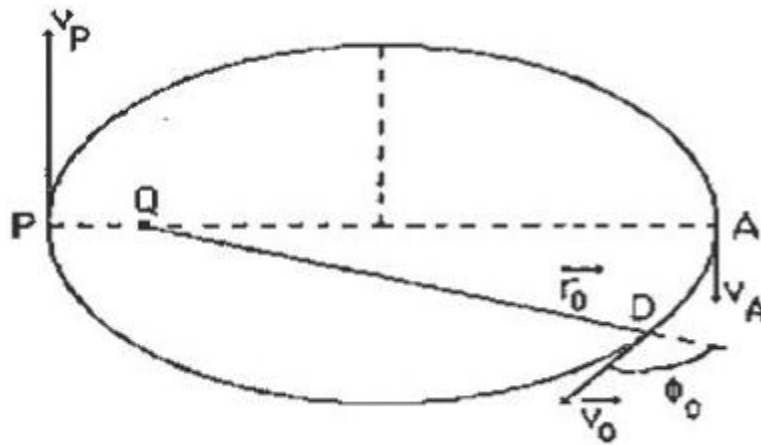
Kepler Yörüngeleri Hakkında Bazı Notlar

Bu şekil bir elipsi göstermektedir. Q ve S odak noktalarıdır.



Yarı büyük eksen $a=OA$ ($=OP$), yarı küçük eksen $b=OB$ dir. $QO(=OS)=a\epsilon$ dir. (ϵ dış merkezlik olarak adlandırılır). Dış merkezliğin sıfır olduğu özel durum için, Q, S ve O çakışır ve $R=a=b$ yarıçaplı bir daire elde ederiz. Eğer a, b ve ϵ üç değişkeninden ikisi biliniyorsa, üçüncüsü hesaplanabilir. Kendinizi buna ikna edin. $QC+CS=QB+BS=QA+AS=2a$ olduğunu aklınızda tutun. Bu bir elipsin bir özelliğidir.

Eliptik yörüngede m kütleli bir uydu(gezeğin) dünyanın(güneşin) etrafında dönmektedir. Dünyanın(güneşin) kütlesi M dir ve elipsin odaklarından biri olan Q dır.



T yörünge periyodu sadece M nin ve yarı büyük eksen a nın bir fonksiyonudur. (Bakınız: Ohanian sayfa 222, örnek 6).

$$T^2 = 4\pi^2 a^3 / MG \quad (1)$$

Dairesel yörünge için, yarı büyük eksenini yerine çemberin R yarıçapı yazılır. (Bakınız: Ohanian sayfa 217, denklem 15). m kütlelerinin yörüngede herhangi bir yerdeki toplam enerjisi:

$$E_{\text{tot}} = -MmG/2a \quad (2)$$

Şeklindedir. Dairesel yörünge için a yerine R yazılır (Bakınız: Ohanian sayfa 226, örnek 27). D noktasında:

$$E_{\text{tot}} = mv_0^2/2 - MnG/r_0 = -MmG/2a \quad (3)$$

m kütlelerinin açısal momentumu (M nin yerleştirildiği Q) korunur. Böylece Q noktasına göre m üzerine etkiyen herhangi bir tork yoktur (yörüngedeki her yerde çekim kuvveti ile r_0 arasındaki vektörel çarpım sıfırdır). Dolayısıyla

$$L_Q = m v_0 r_0 \sin \phi_0 \text{ korunumludur.} \quad (4)$$

P noktasının en yakın yaklaşımı bir isme sahiptir. Dünya ve onun uydularıyla ilgilendiğimiz durumda, bu yerberi olarak adlandırılır, Güneş ve gezegenlerle ilgilendiğimiz zaman bu günberi olarak adlandırılır ve çift yıldız sistemleri durumunda ise enberi olarak adlandırılır. A noktası; en yüksek nokta (dünya), en uzak nokta (güneş), en ötede (çift yıldız) olarak adlandırılır. Çünkü A ve P 'de açı $\phi = \pi/2$ dir.

$$L_Q = m v_A x(QA) = m v_P x(QP) = m v_0 r_0 \sin \phi_0 \quad (5)$$

Başlangıç şartlarından eliptik yörünge nasıl hesaplanır?

Eğer Q ya göre m' nin konumu verilirse ve eğer m' nin bu noktadaki v_0 hızı bilinirse (büyüklüğü ve yönü) eliptik yörünge belirlenir. İlk olarak başlangıç şartlarından (D noktası) toplam enerji (denklem 3) hesaplırsınız, ve a' yı bulursunuz. Şimdi 3 nolu denklemi P noktasına uygularsınız ve içinde v_P^2 olan bir eşitlik elde edersiniz. [Denklem 3'te potansiyel enerji teriminde, $QP=L_Q/mv_P$ mesafesini yer değiştiriniz].

Bu v_P ve v_A olan iki çözüme yol açar (Neden?). 5 nolu denklem ile, şimdi QA ve QP'yi çözersiniz (Başlangıç şartlarından L_Q yu biliyorsunuz, bakınız denklem 4). QA ve QP' yi bilince, dışmerkezliliği ve dolayısıyla elipsin şeklini bilirsiniz.

Örnek (Kontrol etme!)

Dünyanın çevresindeki yörüngedeki uydunun kütlesi 10^4 kilogramdır. Onun hızı 9.00 km/sn' dir ve dünyanın merkezine olan uzaklığı 9.000 km olduğu zaman $\phi=120^\circ$ derecedir. Yerberi ve yerötede hız nedir? Yaklaşabileceği ne yakın noktanın

(yerberi) dünyanın merkezine olan mesafesi nedir? Ve yerötesine olan mesafesi nedir? Yörünge periyodu ve dış merkezliği nedir? Eğer uydunun kütlesi 10 kat daha az olursa, cevaplar ne olur.

$a = 5 \times 10^4 \text{ km}$, $v_p = 10.7 \text{ km/s}$ ve $v_A = 0.75 \text{ km/s}$ buldum (yerberi ve yerötedeki hızlar arasındaki farka dikkat edin). $QP = 6.6 \times 10^3 \text{ km}$ ve $QA = 9.3 \times 10^4 \text{ km}$ $QA + QP$, $2a$ ya tekabül eder. T yörünge periyodu = 31 saat; $\varepsilon = 0.87$ (yörünge, son derece dışmerkezlidir). Uydunun dünyanın yüzeyinden içeriye 200 km geldiğine dikkat edin (yarıçap yaklaşık 6.400 km). Bu yükseklikte, atmosfer uyduyu yavaşlatır. yörünge en sonunda bozulur ve uydu yeniden girecektir.

Jambon sandviçi hakkında yok yere telaş

R yarıçaplı tamamıyla aynı dairesel yörüngede 2 uzay gemisi vardır. Onlar, $f \cdot 2\pi R$ (f dairesinin çevresinin parçasıdır.) mesafesiyle (dairenin çevresi boyunca ölçülen mesafe) ayrılır. Uzay gemisinin arka tarafında bulunan bir astronot (Peter) önde duran arkadaşı Mary'ye jambon sandviçi atmak ister. Biz sadece sandviğin Peter'in uzay gemisinin hızıyla tam olarak aynı yönlü ya da tamamıyla zıt yönlü olarak atıldığı (X noktası) durumlar için çözümleri elde etmeye çalışacağız. Bu dairesel yörüngenin periyodu denklem 1 den elde edilebilir. Yörünge hızı $v_a = 2\pi R / T$ dir. Sandviğin

Eliptik yörüngesinin yörünge periyodu T_s olsun. Biz şimdi Mary' nin X noktasına ulaştığı ilk anda sandviçi yakalayacak şekilde elimizdeki bilgileri düzenlemeye çalışabiliriz. Bu durumda sandviç bir eliptik yörüngeyi tamamlamış olacaktır. Böylece:

$$T_s = T(1-f) = (4\pi^2 a^3 / MG)^{0.5}$$

Verilen f değeri için, a ' yı hesaplayabilirsiniz, ve bu da sizlere (denklem 3'ü kullanarak) sandviğin yakalanabileceği sadece tek nokta olan (niçin?) x noktasındaki v_s hızını bulmanıza yol açar. (derslerde tartışıldığı gibi bu durumda x , elptik yörüngenin yerötesi olacaktır). Bu v_s hızı v_a hızı ile kıyaslanabilir ve Peter'in kendi hareketli uzay gemisine göre sandviçi atması gerektiği $v_s - v_a$ hız farkını bulabilirsiniz. Bu durumda $v_s < v_a$ dır ve bundan dolayı Peter sandviçi kendi hızının zıt yönünde atması gerekir.

Sonsuz sayıda çözüm vardır. Biz Mary' nin sandviçi x noktasından n_a defa geçtikten sonra yakalamasına ve aynı zamanda sandviğin kendi yörüngesinde n_s defa dönmesine müsaade edebiliriz. Bu durumda yakalama için gerekli olan şart

$$n_s T_s = T(n_a - f) \text{ olur (bunu doğrulayınız)}$$

Bu sandviğin eliptik yörüngesinin yarı büyük eksen değeri için gerekli şartın

$$a = R[(n_a - f)n_s]^{2/3} \text{ olmasına yol açar (bunu doğrulayınız)}$$

Şimdi n_s ve n_a nın çeşitli kombinasyonlarını deneyebilir ve çözümün olup olmadığını görebilirsin. $f=0.05$, $n_s=1$ ve $n_a=3$ için sandviğin yörünge periyodu T 'den daha büyük olmak zorunda ve böylece sandviç ileriye doğru atılmak zorundadır. Bu ve başka diğer ihtimaller (bakınız sayfa 4) Prof. George Clark'ın bu durum için yazdığı bilgisayar programı kullanılarak derslerde gösterildi.