18.06 Professor Strang Kısa Sınav 3 4 Mayıs 2005

1 (37 Puan) a) (16 Puan) *A*'nın bütün reel özvektörleri ve üç özdeğerini bulun. *A tekrarlayan özdeğere sahip simetrik Markov matrisidir.*

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

b) (9 Puan) A^k'nın $k \to \infty$ iken limitini bulun. (Her bir elemanını hesaplamadan $A = S\Lambda S^{-1}$ ile çalışabilirsiniz.)

c) (6 Puan) Öyle *r, s, t* pozitif sayıları bulun ki

$A - rI$ pozitif belirli

$A - sI$ belirsiz

$A - tI$ negatif belirli olsun.

d) (6 Puan) *A* $B^T B$'ye eşit olsun. *B*'nin tekil değerleri nelerdir?

2 (41 Puan) a) (14 Puan) 2'ye 2'lik *A* matrisini (a'ya bağlı olarak) özdeğerleri $\lambda = 1$ ve $\lambda = -1$ olacak şekilde oluşturun. $A = \begin{bmatrix} a & 1 \\ & \end{bmatrix}$

b) (9 Puan) *A*'nın iki bağımsız özvektörü olduğunu nasıl bilebilirsiniz?

c) (9 Puan) Hangi a değerleri dik özvektörler verir, hangileri vermez?

d) (9 Puan) Neden herhangi iki a değeri *benzer* (aynı Jordan formuyla) *A* matrisleri verir, açıklayın.

3 (22 Puan) 3'e 3'lük *A* matrisinin $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, $Ax_3 = \lambda_3 x_3$ (λ'lar farklı olmayabilir) şeklinde bağımsız özvektörleri olsun.

a) (11 Puan) $\frac{du}{dt} = Au$ diferansiyel denkleminin her $u(t)$ çözümünün genel formunu tanımlayın. ($e^{At}u(0)$ cevabı λ'ları ve *x*'leri kullanmaz.)

b) (11Puan) R^3'teki herhangi bir u_0 vektöründen başlayarak, $u_{k+1} = Au_k$ olsun. x'lerin ve λ'ların hangi durumunda $u_k \to 0$ ($k \to \infty$ iken) garantilenmiş olur? Neden?