18.06 Professor Strang Kısa Sınav 3 4 Mayıs 2005

1 (37 Puan) a) (16 Puan) *A*'nın bütün reel özvektörleri ve üç özdeğerini bulun. *A tekrarlayan özdeğere sahip simetrik Markov matrisidir.*

$$A=\begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix}$$

b) (9 Puan) A^k'nın $k \to \infty$ iken limitini bulun. (Her bir elemanını hesaplamadan $A = S\Lambda S^{-1}$ ile çalışabilirsiniz.)

c) (6 Puan) Öyle *r, s, t* pozitif sayıları bulun ki

$A - rI$ pozitif belirli

$A - sI$ belirsiz

$A - tI$ negatif belirli olsun.

d) (6 Puan) *A* B^TB'ye eşit olsun. *B*'nin tekil değerleri nelerdir?

Çözüm:

a) *A* matrisinin karakteristik polinomu $-\lambda^3 + \frac{3}{2}\lambda^2 - \frac{9}{16}\lambda + \frac{1}{16} = -(\lambda-1)(\lambda-\frac{1}{4})^2$ 'dir. Öyleyse *A*'nın özdeğerleri bir katlı 1 ve iki katlı $\frac{1}{4}$'dür. 1 özdeğerine bağlı özvektörleri $(1,1,1)^T$'nin sıfırdan farklı katlarıdır. Geri kalan özvektörler $(1,1,1)^T$'nin sıfırdan farklı bütün dik tamlayan vektörleridir: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ -a-b \end{pmatrix}$, $(a,b) \neq (0,0)$. Ve bu vektör uzayının dik tabanı da $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$'dir.

b) S matrisi olarak aşağıdaki dik matrisi seçebiliriz.

$$S=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

Ve Λ matrisi de köşegeninde 1, ¼, ¼ bulunan köşegenel matrisdir. O zaman $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = S(\lim\limits_{k\to\infty} \Lambda^k)S^{-1} = S\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}S^T$ ve $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \end{pmatrix}S^T = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Herhangi *r* < 1/4 için $A-rI$ pozitif belirlidir. *r* ‘nin pozitif olmasını istediğimiz için

r = 1/8 seçebiliriz.

Herhangi ¼< *s* < 1 için $A-sI$ belirsizdir. *s* = 1/2 seçebiliriz.

Herhangi 1< *t* için $A-tI$ negatif belirlidir. *t* = 2 seçebiliriz.

d) *B* ‘nin tekil değerleri 1, ½ ve ½ ‘dir.

2 (41 Puan) a) (14 Puan) 2’ye 2’lik *A* matrisini (a’ya bağlı olarak) özdeğerleri $\lambda=1$ ve $\lambda=-1$ olacak şekilde oluşturun. $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ & \end{bmatrix}$

b) (9 Puan) *A*’nın iki bağımsız özvektörü olduğunu nasıl bilebilirsiniz?

c) (9 Puan) Hangi a değerleri dik özvektörler verir, hangileri vermez?

d) (9 Puan) Neden herhangi iki a değeri *benzer* (aynı Jordan formuyla) *A* matrisleri verir, açıklayın.

Çözüm:

a) *A* matrisinin izi özdeğerlerinin toplamına eşittir, yani 0. O zaman ikinci satır, ikinci sütundaki elemanın -a olduğunu söyleyebiliriz. Benzer şekilde, *A*’nın determinantı özdeğerlerinin çarpımına eşittir, yani -1. O zaman ikinci satır, birinci sütundaki elemanın $1-a^2$ olduğunu söyleyebiliriz. $A=\begin{bmatrix} a & 1 \\ 1-a^2 & -a \end{bmatrix}$

b) *A* matrisinin iki farklı özdeğeri olduğundan iki bağımsız özvektörü vardır.

c) Dik özvektörler veren a seçenekleri sadece *A* matrisini simetrik yapanlardır. O zaman a =0'dır. Eğer $a \neq 0$ olsaydı, *A*'nın dik özvektörleri olmazdı.

d) Herhangi bir a değeri için *A*'nın tam olarak bir özdeğeri 1 ve tam olarak bir özdeğeri

-1 vardır. *A*'nın Jordan doğal formu her zaman $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$'dir.

3 (22 Puan) 3'e 3'lük *A* matrisinin $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, $Ax_3 = \lambda_3 x_3$ (λ'lar farklı olmayabilir) şeklinde bağımsız özvektörleri olsun.

a) (11 Puan) $\frac{du}{dt} = Au$ diferansiyel denkleminin her $u(t)$ çözümünün genel formunu tanımlayın. ($e^{At}u(0)$ cevabı λ'ları ve *x*'leri kullanmaz.)

b) (11Puan) R^3'teki herhangi bir u_0 vektöründen başlayarak, $u_{k+1} = Au_k$ olsun. x'lerin ve λ'ların hangi durumunda $u_k \to 0$ ($k \to \infty$ iken) garantilenmiş olur? Neden?

Çözüm:

a) $\frac{du}{dt} = Au$ diferansiyel denkleminin genel çözümü $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2 + c_3 e^{\lambda_3 t} x_3$'tür burada c_1, c_2, c_3 rastgele sabitlerdir.

b) x_1, x_2, x_3 vektörleri bağımsız olduğundan, R^3 için bir taban oluştururlar.O zaman herhangi bir $u_0 \in R^3$ vektörünü bu vektörlerin doğrusal kombinasyonu olarak yazabiliriz:

$u_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$. Tekrarlayarak *A* matrisini uyguladığımızda şunu elde ederiz. $u_k = A^k u_0 = \lambda_1^k a_1 x_1 + \lambda_2^k a_2 x_2 + \lambda_3^k a_3 x_3$. Eğer k sonsuza giderken u_k vektörlerinin limitinin 0 olmasını istiyorsak, bütün $\lim \lambda_i^k$ sıfır olmalıdır. O zaman bütün *i*'ler için $-1 < \lambda_i < 1$ olmalıdır.