18.06 Professor Strang Kısa Sınav 2 1 Nisan 2005

**1. (17 puan)** $q_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$ ve $q_2 = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix}$ Gram-Schmidt 'in çıktı vektörleri ise mümkün olan bütün $a_1$ ve $a_2$ girdi vektörlerini tanımlayın.

**Çözüm:**

$a_1$ vektörü $q_1$'in herhangi bir sıfırdan farklı, pozitif katı olabilir. $a_2$ vektörü $q_1$'in herhangi bir katı ile $q_2$'nin herhangi sıfırdan farklı, pozitif katının toplamına eşittir.

$$a_1 = cq_1$$
$$a_2 = c_1 q_1 + c_2 q_2 \quad , \quad c, c_1 > 0$$

**2. (15 puan)** a ve b $R^n$'de sıfırdan farklı vektörlerse, $\|b - xa\|^2$ uzunluğunu en küçük yapan x değeri nedir?

**Çözüm:**

$ax = b$ eşitliğinin en küçük kareler çözümünü bulmak istiyoruz ve biliyoruz ki her iki taraftan $a^T$ ile çarpmak ve çıkan sistemi çözmek yeterli olacaktır:

$$a^T a x = a^T b \Rightarrow x = \frac{a.b}{a.a}$$

**3. (17 puan)** $R^3$ **'te** $b = (1,2,6)$ vektörünün $x + y + z = 0$ düzlemine izdüşümü $p$ 'yi bulun.( 2 boyutlu uzayda bir taban, hatta bir dik taban bulmak isteyebilirsiniz).

**Çözüm:**

$(-1,1,0)^T$ ve $(-1,0,1)^T$ vektörleri $x + y + z = 0$ altuzayı için bir taban oluştururlar. A matrisi sütunları yukarıdaki iki vektörden oluşan bir matris olsun. $x + y + z = 0$ altuzayına izdüşüm matrisi P şudur:

$$P = A(A^T A)^{-1} A^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$(1,2,6)^T$'nın $x+y+z=0$ düzlemi üzerine izdüşümü ise:

$$p = P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

**4. (17 puan)** $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ ise $A$ ve $A^{-1}$'in determinantlarını ve $A^{-1}$'in (1,2)'deki elemanını bulun.

**Çözüm:**

A'nın ilk satırına bakarsak; $\det A = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix} = 9-6=3$. O zaman det($A^{-1}$)=1/3. Son olarak, $\left(A^{-1}\right)_{12} = \frac{-C_{21}}{\det A} = \frac{-1}{3}\det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \frac{-(-9)}{3} = 3$.

**5. (17 Puan)** 5'e 5'lik dairesel matris $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$'nin determinantını tekrarlama veya eşçarpan veya diğer yolla (!) bulun.

**Çözüm:**

$$\det C = 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}) + 1(-1\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}) - 1(-1\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix})$$

$$= 2(2(2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}) + 1(-1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix})) + 1(-1(2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}) + 1(1\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix})) - 1(-1($$

$$= 2(2(2.3 + 1(-2) + 1((-1)3)) + 1(-1(2.3 + 1(-2)) + 1(1.(-1)))$$

$$= 10 - 5$$

**6. (17 puan)** *$P_1$*, *A* ‘nın ilk sütunu tarafından gerilen 1-boyutlu altuzay üzerine izdüşüm matrisi olsun. *$P_2$* de *A*’nın 2 boyutlu sütun uzayına izdüşüm matrisi olsun. Biraz düşünerek, *$P_2P_1$* çarpımını hesaplayın.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

**Çözüm:**

*$P_2P_1$* çarpımı, *$P_1$*’in sütun uzayına izdüşüm, ardından da *$P_2$*’in sütun uzayına izdüşümü verir. *$P_2$*’nin sütun uzayı *$P_1$*’in sütun uzayını içerdiğinden, ikinci izdüşüm vektörleri daha fazla değiştirmez. Yani

$$P_2P_1 = P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$