18.06 Professor Strang **Kısa Sınav 1** 28 Şubat 2005

1. (26 Puan) A genel satır işlemleri ile $R = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 'ye indirgenmiş olsun.

Orijinal A'yı içeren *Ax= A'nın sütunları toplamı*

sisteminin tam çözümünü (eğer bir çözüm varsa) bulunuz.

Çözüm:

Tam çözüm $x = x_{belirli} + x_{sıfı\ uzayı}$ 'deki $x_{belirli} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ve $x_{sıfı\ uzayı} = x_2 \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$'dır.

x_2 ve x_4 serbest değişkenleri herhangi bir değer alabilirler.

İki özel çözüm R'nin sıfır uzayından (*R= A'nın sıfır uzayı*) geldi.

1'ler belirli çözümü *Ax= A'nın sütunları toplamı* 'nı verir.

Not: Bu aynı zamanda *Rx=R'nin sütunları toplamı* 'nı da verir.

2. (18 puan) 4'e 4'lük A ve B matrisleri *aynı sütun uzayına* sahip olsunlar. Sütunları aynı olmayabilir!

a) Aynı sayıda pivotları olduğu kesinlikle doğru mudur? EVET HAYIR NEDEN?

b) Aynı sıfır uzayına sahip oldukları kesinlikle doğru mudur? EVET HAYIR NEDEN?

c) Eğer A'nın tersi varsa, B'nin de tersi kesinlikle var mıdır? EVET HAYIR NEDEN?

Çözüm:

a) EVET. Pivot sayısı= rank= sütun uzayının boyutu. Bunlar A ve B için aynıdır.

b) HAYIR. Sıfır uzayı sütun uzayı tarafından belirlenmez.(matrisin simetrik olmadığı durumlarda) Aynı sütun uzayına fakat farklı sıfır uzayına sahip matris örneği:

A= $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ve B= $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

c) EVET. Eğer A'nın tersi varsa, sütun uzayı bütün R^4'tür. B'de aynı sütun uzayına sahip olduğuna göre B nin de tersi vardır.

3. (40 puan) a) A matrisini üst üçgensel U matrisine indirgeyin ve aynı yoketme adımlarını sağ taraftaki b'ye de uygulayın:

$$\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & b_1 \\ 3 & 5 & 1 & b_2 \\ -3 & 3 & 2 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix}$$

3'e 3'lük A matrisini LU=(alt üçgensel)(üst üçgensel) olacak şekilde çarpanlarına ayırın.

b) Eğer A'nın son elemanını 2'den ____________'e (hangi sayı A_{yeni}'yi verir) değiştirirseniz, A_{yeni} tekil olur. Sütun uzayını tam olarak açıklayın.

c) b kısmında bulunan tekil durumda, b_1, b_2, b_3'e bağlı hangi koşul(lar)da $A_{yeni}x = b$ çözülebilir?

d) $A_{yeni}x = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$ (ilk sütun) için tam çözümü yazın.

Çözüm:

a) $\begin{bmatrix} A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & b_1 \\ 3 & 5 & 1 & b_2 \\ -3 & 3 & 2 & b_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & b_1 \\ 0 & 2 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 3 & b_3 - 3b_2 + 4b_1 \end{bmatrix}$

Burada $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = LU = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Eğer A_{33}'ü 2'den -1'e değiştirirseniz, üçüncü pivot 3 azalır ve A_{yeni} tekil olur. Sütun uzayı R^3'te ilk sütunlar olan (3,3,-3) ve (3,5,3)'ün bütün kombinasyonlarını içeren düzlemdir.

c) Sağ tarafta $b_3 - 3b_2 + 4b_1$=0 olmalı (sol taraf sıfır satırı olduğundan).

d) A_{yeni} şunu verir: $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 3 \\ -3 & 3 & -1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Kesinlikle $x_{belirli} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$'dır. Ve $x_{sıfır\,uzayı} = x_3 \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$'dır. Tam çözüm ise $x_{belirli}$ + sıfır uzayındaki herhangi bir vektör 'dür.

4. (16 puan) 7'ye 4'lük A matrisinin sütunları doğrusal bağımsız olsun.

a) Satır işlemleri ile A'yı U ya da R'ye indirgeyin, kaç tane satır tamamen sıfırlardan oluşur (ya da bunu söyleyebilmek mümkün müdür) ?

b) A'nın satır uzayı nedir? $A^T y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ denkleminin neden kesinlikle çözülebilir olduğunu açıklayın.

Çözüm:

a) Rank 4'tür, o zaman U ve R'deki 7-4=3 satır sıifrlardan oluşur.

b) *A*'nın satır uzayı bütün R^4'tür (rankı 4 olduğu için). O zaman R^4'teki her *c* vektörü *A*'nın satırlarının bir kombinasyonudur, bu da her bir c için $A^T y = c$ çözülebilir demektir.