

1 (10 Puan) P_1, \dots, P_n \mathbb{R}^n 'deki noktalar olsun. $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ P_i 'nin koordinatlarıdır. Bütün n P_i noktasını içeren bir $c_1x_1 + \dots + c_nx_n = 1$ hiperdüzlemi bulmak istiyoruz.

a) Bu hiperdüzlemin c 'lerini bulmak için hangi denklem sistemini çözmek gereklidir?

b) \mathbb{R}^3 'te (bu formda) bir hiperdüzlemin var olmayacağı bir örnek verin. Ve bu formda birden fazla hiperdüzlemin olabileceği bir örnek verin.

c) Noktaların ya da onların koordinatlarının hangi koşulları altında *bu denkleme sahip* tek bir yaklaşık hiperdüzlem **yoktur**?

2 (10 Puan) **a)** Pivot değişkenlerine ve serbest değişkenlere (bunlar 1 ya da 0 değerini alırlar) dikkat ederek $Ax = 0$ için tam bir "özel çözümler" kümesi bulun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) ve **c)** Bu özel çözümlerin sıfır uzayı $N(A)$ için bir taban olduğunu ispatlayın. İspatlamamız gereken iki gerçek nedir? Bunlar bu problemin b) ve c) kısımlarıdır.

3 (10 Puan) **a)** $Ax = b$ 'nin çözümünün olmayacağı ve $A^T y = c$ 'nin sadece bir çözümünün olacağı $m \times n$ A matrisi ve b, c vektörleri arıyorum. *Neden bunları sağlayan A, b ve c 'yi bulamam?*

b) Size \mathbb{R}^m 'de b ve p vektörleri ile a_1, a_2, \dots, a_n doğrusal bağımsız vektörlerini vermiş olayım. Eğer p 'nin, b 'nin a 'lar tarafından gerilen altuzay üzerine bir izdüşümü olduğunu iddia edersem, bunun doğruluğunu görmek için hangi testleri uygularsınız?

4 (10 Puan) **a)** $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 'nin determinantını bulun.

b) A 5'e 5'lik $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ matrisi olsun. A^{-1} 'nin rankının 1 olduğuna ve A 'nin

izinin _____ olduğuna dikkat ederek A 'nın bütün beş özdeğerini bulun.

c) A^{-1} 'in (1,3) ve (3,1)'deki elemanlarını bulun.

6 (10 Puan) $P(z) = c_0 + c_1z + c_2z^2 + c_3z^3$ polinomunun dört katsayısını $P(z)$ 'nin $z = 1, i, i^2, i^3$ noktalarındaki y_1, y_2, y_3, y_4 değerlerini bilirsek bulabiliriz.

a) c_0, c_1, c_2, c_3 'ü bulmak için hangi denklemleri çözmek gerekir?

b) Katsayı matrisinin özel bir özelliğini yazın.

c) O denklemlerdeki matrisin tersinin alınabildiğini ispatlayın.

7 (10 Puan) $S \in \mathbb{R}^{7 \times 7}$ 'nin 4-boyutlu altuzayı olsun. Ve P de S üzerine bir izdüşüm matrisi olsun.

a) P 'nin yedi özdeğeri nelerdir?

b) P 'nin bütün özvektörleri nelerdir?

c) Eğer $u(0)$ 'dan başlayarak $\frac{du}{dt} = -Pu$ (eksi işaretine dikkat) çözerseniz, $t \rightarrow \infty$ iken $u(t)$ 'nin çözümü kararlı duruma yaklaşır. $u^{(\infty)}$ limit vektörünü tanımlayabilir misiniz?

8 (10 Puan) Favorim $-1, 2, -1$ matrisi fazladan sıfırlarla birlikte aşağıdaki matrise dönmüş olsun:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Öyle bir P permütasyon matrisi bulun ki

$$B = PAP^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

b) B 'nin 4 özdeğeri nelerdir? Bu matris köşegenleştirilebilir mi değil mi?

c) A 'nın da B ile aynı özdeğerlere sahip olduğunu nasıl bilebilirsiniz? O zaman A pozitif belirlidir- öyleyse u, v, w, z 'nin hangi fonksiyonu $u=v=w=z=0$ dışında pozitifdir?

9 (10 Puan) a) Tekil A matrisinin sıfır uzayına dik olan bütün vektörleri tanımlayın. Bunu sıfır uzayını hesaplamadan yapabilirsiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Eğer A 'nın sütunlarına Gram-Schmidt uygularsanız, hangi birim dikey vektörleri elde edersiniz?

c) A 'nın "indirgenmiş" LU çarpımını L 'de sadece 2 sütun ve U 'da sadece 2 satır olacak şekilde bulun.

10 (10 Puan) $A = U\Sigma V^T$ tekil değer ayrışımında

$$U = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

a) $A^T A$ 'nın özdeğerlerini bulun.

b) A 'nın sıfır uzayı için bir taban bulun.

c) A 'nın sütun uzayı için bir taban bulun.

d) $-A^T$ 'un tekil değer ayrışımını bulun.