18.06 Professor Strang FİNAL 16 Mayıs 2005

1 (10 Puan) $P_1,...,P_n$ R^n'deki noktalar olsun. $(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$ P_i 'nin koordinatlarıdır. Bütün n P_i noktasını içeren bir $c_1x_1+...+c_nx_n=1$ hiperdüzlemi bulmak istiyoruz.

a) Bu hiperdüzlemin *c*'lerini bulmak için hangi denklem sistemini çözmek gereklidir?

b) R^3'te (bu formda) bir hiperdüzlemin var olmayacağı bir örnek verin. Ve bu formda birden fazla hiperdüzlemin olabileceği bir örnek verin.

c) Noktaların ya da onların koordinatlarının hangi koşulları altında *bu denkleme sahip* tek bir yaklaşık hiperdüzlem **yoktur**?

Çözüm:

a) $(a_{i1},a_{i2},...,a_{in})$ koordinatlarının $c_1x_1+...+c_nx_n=1$ denklemini sağlamasını istiyoruz. O zaman çözmemiz gereken denklem sistemi $Ac=1$'dir:

$$\begin{gathered} c_1a_{11}+c_2a_{12}+...+c_nx_{1n}=1 \\ c_1a_{21}+c_2a_{22}+...+c_nx_{2n}=1 \\ ... \\ c_1a_{n1}+c_2a_{n2}+...+c_nx_{nn}=1 \end{gathered}$$

b) Eğer P_i noktalarından biri orijinse, verilen formda hiçbir düzlem yoktur.R^3'te bir örnek (0, 0, 0) , (1, 0, 0) ve (0, 1, 0) noktalrı ile verilir: (tek) $x_3=0$ düzlemi üzerindedirler ve bu düzlem olması gereken formda değildir.

c) det A = 0 tam olarak tek bir çözümü yoktur. Bunun geometrik olarak anlamı şudur ki P_i noktaları R^n'in (n-1)-boyutlu bir altuzayı üzerindedirler.

2 (10 Puan) a) Pivot değişkenlerine ve serbest değişkenlere (bunlar 1 ya da 0 değerini alırlar) dikkat ederek $Ax=0$ için tam bir "özel çözümler" kümesi bulun.

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) ve **c)** Bu özel çözümlerin sıfır uzayı *N(A)* için bir taban olduğunu ispatlayın. İspatlamanız gereken iki gerçek nedir? Bunlar bu problemin b) ve c) kısımlarıdır.

Çözüm:

a) İlk satırı ikinciden çıkarırsak, şu matrisi buluruz:

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(R satırca indirgenmiş basaklı formunda, 5 değişerek 0 olur.) Birinci ve sonuncu pivot değişkenleri,, geri kalanlar ise serbest değişkenlerdir. $Ax = 0$'nin "özel çözümleri"

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ 'dır.

b) ve **c)** Bu üç vektörün *doğrusal bağımsız* olduklarını ve *sıfır uzayını gerdiklerini* ispatlamamız gerekiyor. İkinci,üçüncü ve dördüncü koordinatları düşündüğümüzde, bunların sıfır yapan bir toplamlarının katsayıları sıfır olmak zorundadır. Sıfır uzayının boyutu üç olduğundan(*A* matrisinin rankı 2 idi) , vektörler sıfır uzayını gerer.

3 (10 Puan) a) $Ax = b$'nin çözümünün olmayacağı ve $A^T y = c$'nin sadece bir çözümünün olacağı *mxn A* matrisi ve *b, c* vektörleri arıyorum. *Neden bunları sağlayan A, b ve c 'yi bulamam?*

b) *Size* R^m'de *b* ve *p* vektörleri ile $a_1, a_2, ..., a_n$ doğrusal bağımsız vektörlerini vermiş olayım. Eğer *p*'nin, *b*'nin a'lar tarafından gerilen altuzay üzerine bir izdüşümü olduğunu iddia edersem, bunun doğruluğunu görmek için hangi testleri uygularsınız?

Çözüm:

a) $Ax = b$'nin hiçbir çözümünün olmamasının koşulu *A*'nın sütun uzayının m'den daha küçük olmasıdır. Aslında, rank r < m. $A^T y = c$'nin tek bir çözümü olduğundan A^T'nin sütunları bağımsızdır. Bu A^T'nin rankı r = m 'dir demektir. Bu çelişki *A, b ve c* bulamayacağımızı kanıtlar.

b) İki ifadeyi kontrol etmeliyiz: *b-p* vektörü $a_1, a_2, ..., a_n$ tarafından gerilen uzaya diktir ve *p* vektörü bu uzaydadır. Kontrol ettiğimiz ilk durumda $a_1.(b-p), ..., a_n.(b-p)$ skaler çarpımlarının herbirinin sıfır olup olmadığına bakarız. İkinci durumda ilk n satırı a_i'lerin koordinatları ve son satırı *p*'nın koordinatları olan (n+1)xm matrisi düşünürüz. Ancak ve ancak yok etmenin son aşamasında son satır sıfır satırı olursa *p* vektörü a_i'lerin germesindedir.

4 (10 Puan) a) $B=\begin{bmatrix}1&2&1&1\\1&1&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{bmatrix}$'nin determinantını bulun.

b) *A* 5'e 5'lik $A=\begin{bmatrix}2&1&1&1&1\\1&2&1&1&1\\1&1&2&1&1\\1&1&1&2&1\\1&1&1&1&2\end{bmatrix}$ matrisi olsun. *A-I*' nin rankının1 olduğuna ve *A*'nın izinin _____________ olduğuna dikkat ederek *A*'nın bütün beş özdeğerini bulun.

c) A^{-1}'in (1,3) ve (3,1)'deki elemenlarını bulun.

Çözüm:

a) Determinantı bulmak için ikinci satırı bütün satırlardan çıkarırız.

$$\det B=\det\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=-\det\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=-1.$$

b) $\lambda=1,1,1,1,6$. *A-I* 'nın bütün satırları bibrine eşit olduğundan rankı birdir. O zaman 4 özdeğeri de sıfırdır. *A*'nın özdeğerleri, *A-I'* nın özdeğerlerinin bir fazlasına eşittir. O zaman *A*'nın özdeğeri 1dir dört katlıdır. *A*'nın izi 10'dur, öyleyse 10-4=6 bir özdeğerdir.

c) *A* simetriktir, öyleyse A^{-1} de simetriktir. Kofaktör formülü şunu verir: $(A^{-1})_{13}=(-1)^{1+3}\dfrac{\det B}{\det A}$, ve özdeğerlerinin çarpımına eşit oldupundan det A = 6. O halde A^{-1} 'in (1,3) ve (3,1)'deki elemanlarının ikisi de -1/6'dır diyebiliriz.

5 (10 Puan) a) *A*'nın özvektörleri x_1 = *(3,1)* ve x_2 = *(2,1)* olacak şekilde *A* matrisini (verilmeyen 2 elemanı bulun) tamamlayın:

$$A=\begin{bmatrix}2&6\\ & \end{bmatrix}$$

b) Özvektörleri aynı x_1, x_2 olan ve özdeğerleri $\lambda_1=1$ ve $\lambda_2=0$ olan farklı bir ***B*** matrisi bulun. ***B*^{10} nedir?**

Çözüm:

a) *A* matrisi $A=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -1 & 7\end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix}a & b\end{bmatrix}$ *A* matrisinin ikinci satırı olsun. x_1 özvektör olduğundan, $Ax_1=\lambda_1 x_1$'dir ve $Ax_1=\lambda_1\begin{bmatrix}3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\3a+b\end{bmatrix}$. $\lambda_1=4$ ve dolayısıyla $3a+b=4$. Benzer şekilde, x_2 özvektör olduğundan, $Ax_2=\lambda_2 x_2$'dir ve $Ax_2=\lambda_2\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\2a+b\end{bmatrix}$. $\lambda_2=5$ ve dolayısıyla $2a+b=5$. O zaman $a=-1$ ve *b*= 7*.*

b) $B=S\Lambda S^{-1}$ ki S matrisinin sütunları x_1 ve x_2 vektörleri, Λ'da elemanları 1 ve 0 olan köşegenel matristir. $B=\begin{bmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\-1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -6\\1 & -2\end{bmatrix}$. $\Lambda^{10}=\Lambda$ ve $B^{10}=S\Lambda^{10}S^{-1}=S\Lambda S^{-1}=B$.

6 (10 Puan) $P(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+c_3z^3$ polinomunun dört katsayısını $P(z)$'nin $z=1,i,i^2,i^3$ noktalarındaki y_1, y_2, y_3, y_4 değerlerini bilirsek bulabiliriz.

a) c_0, c_1, c_2, c_3'ü bulmak için hangi denklemleri çözmek gerekir?

b) *Katsayı matrisinin özel bir özelliğini yazın***.**

c) O denklemlerdeki matrisin tersinin alınabildiğini ispatlayın.

Çözüm:

a) Aşağıdaki denklemleri çözeceğiz:

$$\begin{aligned}c_0+c_1+c_2+c_3&=y_1\\ c_0+ic_1-c_2-ic_3&=y_2\\ c_0-c_1+c_2-c_3&=y_3\\ c_0-ic_1-c_2+ic_3&=y_4\end{aligned}$$

Katsayı matrisi de

$$F=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & -1 & -i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & -i & -1 & i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & i & i^2 & i^3\\ 1^2 & i^2 & i^4 & i^6\\ 1^3 & i^3 & i^6 & i^9\end{bmatrix}.$$

b) *F*'in *dik sütunları* var ve *simetrik*. Aynı zamanda bir Vandermonde matrisidir: her sütun bir sayının ilk dört katını (sıfırıncı kuvvetten başlayarak) içerir.

c) *F*'nin sütunları dik ve sıfırdan farklı olduğu için, matrisin tersi alınabilir. Tersi $\frac{\overline{F}}{4}$'tür. Bu Vandermonde matrisinin determinantı *1, i, i^2, i^3* 'ün farklarının çarpımına eşittir.

$\det F = (i-1)(-1-1)(-1-i)(-i-1)(-i-i)(-i+1) = -16i$.

7 (10 Puan) S R^7'nin 4-boyutlu altuzayı olsun. Ve P de **S** üzerine bir izdüşüm matrisi olsun.

a) P'nin yedi özdeğeri nelerdir?

b) P'nin bütün özvektörleri nelerdir?

c) Eğer $u(0)$'dan başlayarak $\frac{du}{dt} = -Pu$ (eksi işaretine dikkat) çözerseniz, $t \to \infty$ iken $u(t)$'nin çözümü kararlı duruma yaklaşır. $u(\infty)$ limit vektörünü tanımlayabilir misiniz?

Çözüm:

a) *P* 'nin yedi özdeğeri 1,1,1,1,0,0,0'dır.

b) 1 özdeğerine bağlı özvektörler *S*'in sıfırdan farklı olan vektörleridir. 0 özdeğerine bağlı *S*'in dik bütünleyenindeki sıfırdan farklı vektörlerdir.

c) Diferansiyel denklemin $u(t)$ çözümü şu formdadır: $u(t) = v_1 e^{-t} + v_2$. Burada v_1 *S*'te bir vektör ve v_2 *S*'in dik bütünleyeninde bir vektördür. $u(\infty) = v_2$ olduğunu söyleyebiliriz ve *u(0)*'ın *S*'in dik bütünleyenine dik izdüşümüne eşittir.

8 (10 Puan) Favorim -1, 2, -1 matrisi fazladan sıfırlarla birlikte aşağıdaki matrise dönmüş olsun:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

a) Öyle bir P permütasyon matrisi bulun ki

$$B = PAP^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

b) *B*'nin 4 özdeğeri nelerdir? Bu matris köşegenleştirilebilir mi değil mi?

c) *A*'nın da *B* ile aynı özdeğerlere sahip olduğunu nasıl bilebilirsiniz?O zaman *A* pozitif belirlidir- öyleyse *u, v,w, z* 'nin hangi fonksiyonu *u=v=w=z=0* dışında pozitiftir?

Çözüm:

a) P matrisi $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ olsun. P'nin aradığımız matris olduğunu kolayca kontrol edebiliriz.

b) B blok köşegenel matris olduğundan, özdeğerleri köşegenel blokların özdeğerleridir. Bizim sorumuzda, iki blok aynıdır ve her bloğun özdeğerleri 3 ve 1 'dir. O zaman B'nin özdeğerleri 3, 3 ,1, 1'dir.

c) P permütasyon matrisi olduğundan, diktir , bu yüzden $P^T=P^{-1}$'dir.B matrisi, bu yüzden A matrisi gibidir ve A ve B aynı özdeğerlere sahiptirler diyebiliriz.

u, v,w, z 'nin *u=v=w=z=0* duurmu dışında pozitif olan fonksiyonu ise

$$\begin{bmatrix} u & v & w & z \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ z \end{bmatrix} = 2(u^2+v^2+w^2+z^2-uw-vz).$$

9 (10 Puan) a) Tekil *A* matrisinin sıfır uzayına dik olan bütün vektörleri tanımlayın. Bunu sıfır uzayını hesaplamadn yapabilirsiniz.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

b) Eğer *A*'nın sütunlarına Gram-Schmidt uygularsanız, hangi birim dikey vektörleri elde edersiniz?

c) *A* 'nın "indirgenmiş" LU çarpımını L'de sadece **2** sütun ve U'da sadece **2** satır olacak şekilde bulun.

Çözüm:

a) *A*'nın sıfır uzayına dik olan vektörler *A*'nın satırlarıdır. *A*'nın tekil olduğunu bildiğimizden ve rankı 1 olmadığından, *A'*nın rankı ikidir. İlk iki satır bağımsızdır, dolayısıyla *A*'nın sıfır uzayının dik bütünleyeni şu iki vektör tarafından gerilir:

$$\begin{bmatrix}1\\3\\7\end{bmatrix} \; ve \; \begin{bmatrix}2\\2\\6\end{bmatrix}.$$

b) $\frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix} \quad ve \quad \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ vektörlerini elde ederiz.

c) "İndirgenmiş" LU ayrışımı, U'daki sıfır satırını görmezsek $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\\2 & \frac{5}{4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\end{bmatrix}.$

Ara adımlar: Yok etmeyi uygulamaya başlarsak şunu buluruz:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\-2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 2 & 6\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\\0 & -5 & -10\end{bmatrix},$$

ve devam edersek

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & -\frac{5}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\\0 & -5 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Bütün bilgileri birleşitirirsek

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 2 & 6\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & \frac{5}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\\0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

ve sağdaki ilk iki matris çarparsak

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\2 & 2 & 6\\2 & 1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\2 & 1 & 0\\2 & \frac{5}{4} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 3 & 7\\0 & -4 & -8\\0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Sondaki matrisin son satırı tamamen sıfır olduğundan şöyle diyebiliriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}.$$

Bu *A*'nın "indirgenmiş" LU ayrışımıdır. L'nin sütunlarını U'nun satırları ile çarparsak

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 & -8 \end{bmatrix}$$

10 (10 Puan) $A = U\Sigma V^T$ tekil değer ayrışımında $U = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ olsun.

a) $A^T A$'nın özdeğerlerini bulun.

b) A'nın sıfır uzayı için bir taban bulun.

c) A'nın sütun uzayı için bir taban bulun.

d) $-A^T$'un tekil değer ayrışımını bulun.

Çözüm:

a) $A^T A$'nın özdeğerleri, köşegenleri 1,16,0,0 olan 4x4 köşegenel matris $\Sigma^T\Sigma$ 'nın özdeğerleri ile aynıdır.

b) *N(A)* sıfır uzayı *V'*nin *son iki satırı* tarafından gerilir.

c) *A*'nın sütun uzayı *U*'nun ilk ikisütunu tarafından gerilir, ve *U*'nun tersi alınabildiği için bu iki vektör yine bağımsızdır.

d) $-A^T$'un tekil değer ayrışımını $-A^T = (-V)\Sigma^T U^T$ olarak yazın.