18.06 Doğrusal Cebir - Bahar 2005 - Problem Set 8

Zorlayıcı Problemin çözümü

Zorlayıcı Problem: 3'e 3'lük $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \end{bmatrix}$ matrisini göz önüne alalım.

a, b, c, d, e, f elemanlarını aşağıdakiler sağlanacak şekilde bulunuz:

- Sol üstteki 1x1 blok matrisin özdeğeri 2
- Sol üstteki 2x2 blok matrisin özdeğeri 3 ve -3
- Sol üstteki 3x3 blok matrisin özdeğeri 0, 1 ve -2

Çözüm: A_i ile A'nın sol üstteki $i\,x\,i$ lik blok'unu gösterelim. O zaman A_1 matrisi (a) olur. a bu matrisin tek özdeğeri olmasından dolayı, $a = 2$ sonucuna varırız.
Şimdi A_2 matrisinin elemanlarını bulmaya geçelim, A_2 yani A'nın sol üst 2x2 lik bloğu:

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Hipotezden A_2'nin özdeğerlerinin toplamı *0* olduğundan ve bu aynı zamanda A_2'nin İz'ine eşit olduğundan $2+d = 0$ veya $d=-2$ elde ederiz. Buna ek olarak, hipotezden A_2 nin özdeğerlerinin çarpımı -9 dur ve bu A_2 nin determinantına eşittir. O halde

$$-9 = 2d-b = -4-b$$

olur, ve buradan da b=5 elde edilir ve böylece

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

olarak buluruz.

Son olarak $A = A_3$ ü göz önüne alalım. Yine A'nın özdeğerlerinin toplamı -1 dir ve bu da A'nın İz'ine eşittir. Bundan dolayı $f = -1$ olur. Bizim hala A'nın c ve e elemanlarını bulmaya ihtiyacımız var, ve

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & c \\ 1 & -2 & e \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olur. Bu matrisin karakteristik polinomu

$$-\lambda^3 - \lambda^2 + (e+9)\lambda + c - 2e + 9$$

olarak elde edilir. Bu polinomun köklerinin 0, 1 ve -2 olduklarını biliyoruz. $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ koyarak

$$c - 2e + 9 = 0$$
$$-1 - 1 + (e + 9) + c - 2e + 9 = 0$$

olup bu da

$$c - 2e = -9$$
$$c - e = -16$$

a eşittir. Böylece *c = -23* ve *e= -7* elde ederiz ve sonuç olarak

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -23 \\ 1 & -2 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

olur