18.06 – Bahar 2005- Problem Seti 2

Zoralayıcı Problem:

Basit yok etme matrisinin tersi (E_{ij} ile çıkarma yerine E_{ij}^{-1} ile toplama) *i, j* pozisyonuna + l_{ij} eklenmiş birim matristir. $A = LU$ 'nun gizemi şudur ki bunları ters sırayla E_{ij}^{-1} ile çarpınca *L*'deki her l_{ij} değişmeden kalır.

Bu problem şu kilit Lemma'yı ispatlar:

> M matrisi *(i, j)*'ye kadar ama onu içermeyen l'lerle dolu bir matris olsun. ve N de sonraki l_{ij} le oldurulmuş sonraki matris olsun.İkisininde ana köşegeninde 1'ler vardır ve *j*'den önceki sütunları tamamen doludur. $ME_{ij}^{-1} = N$ olduğunu ispatlayın.

O zaman her E_{ij}^{-1} l_{ij}'ler ile doludur ve bunların çarpımı doğru alt üçgensel *L*'dir. E_{ij}^{-1} ile *sağdan* çarpıldığına dikkat edin ---bu bir matrisin *sütunlarına* ne yapar?

Çözüm:

C_{ij} (i,j) girdisinde 1, başka heryerde 0 olan nxn matris olsun. Matrislerle şunu yazabiliriz. $E_{ij} = I - l_{ij}C_{ij}$ ve $E_{ij}^{-1} = I + l_{ij}C_{ij}$. Öyleyse

$$ME_{ij}^{-1} = M(I + l_{ij}C_{ij}) = M + l_{ij}MC_{ij}$$

MC_{ij} matrisi *j*'den farklı sütunları tamamen 0 olan matristir*. j*. sütunu *M*'nin *i.* sütunudur. E_{ij} alt üçgensel bir matris olduğu için i>j 'dir ve *M* sadece *j* sütununa kadar dolu olduğu için, *M*'nin *i.* sütununun *i.* sırasında tam olarak bir 1 diğer yerlerinde 0 vardır.Öyleyse MC_{ij} matrisinin *(i,j)* pozisyonunda tam olarak bir sıfırdan farklı girdi olan bir matristir, bu girdi de 1'dir, yani $MC_{ij} = C_{ij}$.

Sonuç olarak gerektiği gibi $ME_{ij}^{-1} = M + l_{ij}C_{ij} = N$ diyebiliriz.

M matrisini E_{ij}^{-1} ile sağdan çarpmak, *M*'nin *j.* sütunu dışındaki sütunlarını değiştirmez. *j.* sütununa da *M*'nin i. sütununu l_{ij} ile çarpıp ekler.