

## 18.06 – Bahar 2005- Problem Seti 1

3x3'lük  $Ax = b$  sistemleri için zorlayıcı problem:

Sütun resminde ve satır resmindeki olası sorunları bulun ve diğer resimdeki karşılığını söyleyin. Başarı, kombinasyonları her  $b$  vektörünü veren 3 sütundur. Bu satır resminde bir noktada kesişen 3 düzleme karşılık gelir ( tek bir  $x$  çözümü). İki çeşit sorun için sayısal örnek verin:

- 3 sütun aynı doğru üzerindedir.  
Satır resmindeki bu 3 düzlem .....?

3 düzlem paraleldir.

Eğer  $b$  sütunların doğrusu üzerindeyse, 3 düzlem bir ..... karşılaşır?

- 3 sütun aynı düzlemedir, ama herhangi ikisi aynı doğru üzerinde değildir. Bu durumda 3 düzlem ne yapar? Resimle gösterin. Hangi  $b$ 'ler için  $Ax = b$  çözülebilir?

**Çözüm:**

3x3 bir sistemde olabilecek bütün durumları inceleyelim.

1) **Başarı.** Bir sistemin yoketme adımlarında başarılı olabilmesi için, katsayı matrisinin yapısı şu iki şekilde olabilir.

- a) *Tam Başarı.* Matris üç bağımsız sütun içerebilir. Bu durumda, sütunlar bütün zayı gerer ve sairların oluşturduğu düzlemler tek bir noktada birleşir. Buna bir örnek aşağıdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (1)$$

- b) *Geçici Sorun.* Pivot bulunabilmesi için matriste bir satır değişikliği yapmak gerekebilir. Bu yapıldıktan sonra, üç tane birbirinden bağımsız sütun olur ve sütunlar bütün uzayı gerer. Sonuç olarak düzlemler tek bir noktada kesişir. Aşağıdaki buna bir örnektir.

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- 2) **Sorun.** İki çeşit sorun vardır. Her birinin de sütun ve satır resmini tanımlayan iki alt çeşidi vardır.
- a) *Doğruduş Sütunlar.* Katsayı matrisinin sütunları aynı doğruya olabilirler. Bu iki olanak sunar.

i) **b** vektörü katsayı matrisinin sütunlarının olduğu doğru üzerindedir. Böyle bir durumda, sütunların gerekli vektörü oluşturmak için sonsuz sayıda kombinasyonu olduğundan sonsuz sayıda çözüm vardır. Satır resminde, üç düzlem üstüste çakışır. Buna bir örnek aşağıdadır.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 24 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ii) **b** vektörü matris sütunlarını içeren doğru dışında uzayın herhangi bir yerinde olabilir. Böyle bir durumda, sütunların istenen vektörü oluşturmak için bir kombinasyonları mümkün olmadığından sistemin çözümü olmaz. Satır resminde ise üç düzlem birbirine paraleldir. Aşağıdaki buna bir örnektir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 6 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 16 \\ 23 \end{bmatrix} \quad (4)$$

b) *Düzlemdeş Sütunlar.* Katsayı matrisi aynı düzlemde olan sütunlara sahip olabilir. Bu iki olanak sunar.

- i) **b** vektörü katsayı matrisinin sütunlarının olduğu düzlemde olabilir. Böyle bir durumda, sütunların istenen vektörü üretmek için sonsuz sayıda kombinasyonu olduğu için sonsuz sayıda çözüm vardır. Satır resminde, üç düzlem bir doğruya buluşur. Aşağıdaki buna bir örnektir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (5)$$

ii) **b** vektörü katsayı matrisinin sütunlarının olduğu düzlem dışında olabilir. Böyle bir durumda, sütun vektörlerinin istenen vektörü üretmek için bir kombinasyonu olmadığından için sistemin çözümü yoktur. Satır resminde, üç düzlem üç farklı doğruda buluşur. Aşağıdaki buna bir örnektir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix} \quad (6)$$