

Özet: Açısal momentumun türetimi

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (21-1)$$

$$L_x = yp_z - zp_y, \text{ etc.} \quad (21-2)$$

$$[x, p_y] = 0, \text{ etc.} \quad (21-3)$$

Açısal momentum değiştirme bağıntıları

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (21-4)$$

$$[L_i, L_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} L_k \quad (21-5)$$

Levi- Civita simgesi

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & xyz\text{'nin çift permütasyonu} \\ -1 & \text{tek permütasyon} \end{cases} \quad (21-6)$$

Genel olarak, L_x, L_y, L_z , nin eşzamanlı öz durumları yoktur

$$\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad (21-7)$$

$$[\mathbf{L}^2, L_x] = [\mathbf{L}^2, L_y] = [\mathbf{L}^2, L_z] = 0, \quad (21-8)$$

$\mathbf{L}^2$ ve bir bileşeni (L_z) nin eşzamanlı öz durumlarıdır.

Genelliği kaybetmeden $\mathbf{L}^2$ ve L_z nin $|l, m\rangle$ eşzamanlı öz durumlarını tanımlayalım
öyleki

$$L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle \rightarrow m \text{ manyetik kuantum sayısı} \quad (21-9)$$

$$\mathbf{L}^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle \rightarrow \begin{pmatrix} l \geq 0 \text{ toplam ortalama} \\ \text{momentumun kuantum sayısı} \end{pmatrix} \quad (21-10)$$

$$\langle l', m' | l, m \rangle = \delta_{l'l} \delta_{m'm}, \rightarrow \text{ortonormallik} \quad (21-11)$$

Artırıcı ve Eksiltici İşlemciler

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = L_{\pm}^{\dagger} \quad (21-12)$$

$$[\mathbf{L}^2, L_{\pm}] = 0 \quad (21-13)$$

Not. $L_{\pm}$ l 'yi korur.

$$L_{\pm}|l, m\rangle = |l, \widetilde{m \pm 1}\rangle, \text{ from } [L_{\pm}, L_z] = \mp \hbar L_{\pm} \quad (21-14)$$

Not. $L_{\pm}$ manyetik kuantum sayısını 1 artırır (eksiltir)

$$\langle l, \widetilde{m \pm 1} | l, \widetilde{m \pm 1} \rangle = \langle L_{\pm} l, m | L_{\pm} l, m \rangle = \hbar^2 (l \mp m)(l \pm m + 1) \quad (21-15)$$

$$\boxed{|m| \leq l} \quad (21-16)$$

L_+ m'yi 1 artırdığından, bazı $m_{\max}$ ler için $L_+ |l, m_{\max}\rangle$ veya

$$\langle l, \widetilde{m_{\max} + 1} | l, \widetilde{m_{\max} + 1} \rangle = \hbar^2 (l - m_{\max})(l + m_{\max} + 1) = 0 \quad (21-17)$$

ihtiyaç duyarız.

$$\boxed{m_{\max} = l} \quad (21-18)$$

$$L_- |l, m_{\min}\rangle = 0, \quad \text{bazı } m_{\min} \text{ için} \quad (21-19)$$

$$\langle l, \widetilde{m_{\min} - 1} | l, \widetilde{m_{\min} - 1} \rangle = \hbar^2 (l + m_{\min})(l - m_{\min} + 1) = 0 \quad (21-20)$$

$$\boxed{m_{\min} = -l} \quad (21-21)$$

zira $m_{\max} - m_{\min} =$ tamsayı (L_+ 'nin $|l, m_{\min}\rangle$ 'e uygulanmasının tam sayı olması).

$m_{\max} - m_{\min} = 2l =$ tamsayı. (yarı tamsayının l tamsayısı)

Durum vektör yazılımı ve dalga fonksiyonları

Keyfi bir $|\psi\rangle$ durumunun ayrıştırılmasında, ki bu $|n\rangle$ enerji öz durumları cinsinden,

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle \quad (21-22)$$

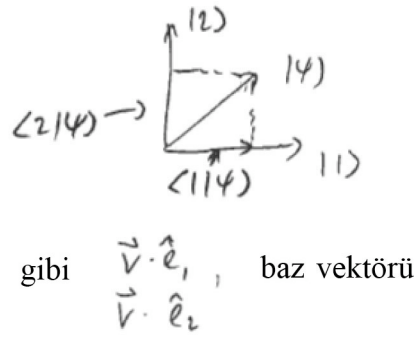
$$c_n = \langle n | \psi \rangle \quad (21-23)$$

Benzer şekilde, $|\psi\rangle$ durumunun izdüşümünü öyle bir duruma alabiliriz ki burada parçacık x 'de belirli olarak bulunur ve başka bir yerde olamaz. Yani, konum vektörünün x_0 özdeğerli, $|x_0\rangle$ öz durumuna getirilir.

$$\hat{x}|x_0\rangle = x_0|x_0\rangle \quad (21-24)$$

(Konum uzayında, bu durumlar δ -fonksiyonudurlar.) Dalga fonksiyonunu öz durumların sürekliliği cinsinden açınma tabi tutabiliriz

$$|\psi\rangle = \int dx c(x) |x\rangle \quad (21-25)$$



Şekil I: Bir durum vektörünün baz vektörlerine ayrışması

burada $|x\rangle$, özdeğeri x olan konum işlemcisidir, $\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle$, ve açınım katsayıları

$$c(x) = \langle x | \psi \rangle. \quad (21-26)$$

ile verilir.

$c(x)dx$, parçacığı $[x, x + dx]$ aralığında bulma olasılığı olduğundan, konumsal dalga fonksiyonunun açınım katsayılarını belirleyip

$$\underbrace{|\psi\rangle}_{\text{keyfi durum}} = \int dx \underbrace{\psi(x)}_{\text{skaler katsayı}} \underbrace{|x\rangle}_{x \text{ özdurumu}}, \quad (21-27)$$

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle \rightarrow \left(|\psi\rangle \text{ vektörünün konum } \begin{matrix} \text{özdurumu } |x\rangle \text{ e izdüşümü} \end{matrix} \right). \quad (21-28)$$

olarak yazabiliriz.

Konum uzayındaki $\psi(x)$ dalga fonksiyonu, $|\psi\rangle$ durumunun konum öz durumları cinsinden açınım katsayılarının bir kümesidir, yani parçacığın x 'de konuştandığı konum öz durumuna $|\psi\rangle$ durumunun bir izdüşümü gibidir. Benzer şekilde, momentum öz durumları cinsinden açınım yapalım

$$|\psi\rangle = \int dk \tilde{\phi}(k) |k\rangle, \quad (21-29)$$

$$\tilde{\psi}(k) = \langle k | \psi \rangle. \quad (21-30)$$

Momentum uzayındaki dalga fonksiyonu, momentum öz durumları cinsinden açınım katsayılarının bir kümesidir. Benzer şekilde, $|\theta, \phi\rangle$ öz durumlarının kutupsal koordinatlarda (yani, parçacığın belirli olarak θ, ϕ ile verilmiş yönlerde bulunup, başka bir yerde bulunmaması):

$$|\psi\rangle = \int d\Omega c(\theta, \phi) |\theta, \phi\rangle \quad (21-31)$$

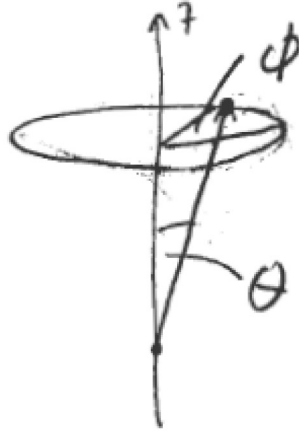
$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta c(\theta, \phi) |\theta, \phi\rangle \quad (21-32)$$

$$= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d(\cos \theta) c(\theta, \phi) |\theta, \phi\rangle \quad (21-33)$$

açısal dalga fonksiyonu

$$Y(\theta, \phi) = c(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | \psi \rangle, \quad (21-34)$$

ile açısal öz durumlar cinsinden açınım katsayılarıdır.



Şekil II: Küresel koordinatlarda θ, ϕ açıları

“Açı temsili”nde $|l, m\rangle$ açısal momentum öz durumunun dalga fonksiyonu

$|l, m\rangle$ durumuna karşı gelen dalga fonksiyonu

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \langle \theta, \phi | l, m \rangle \quad (21-35)$$

ispatsız: $L_z = xp_y - yp_x$ vs. 'yi kutupsal koordinatlarda yazıp ve $p_i = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x_i}$ 'yi yerine yazarsak, aşağıdaki işlemci ifadelerini elde ederiz:

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}, \quad (21-36)$$

$$L_{\pm} = \hbar e^{\pm i\phi} \left(\pm \frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right). \quad (21-37)$$

L_z denklemi şöyle yazılır:

$$\langle \theta, \phi | L_z | l, m \rangle = \hbar m \langle \theta, \phi | l, m \rangle \quad (21-38)$$

$$= \hbar m Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (21-39)$$

$$\langle \theta, \phi | L_z | l, m \rangle = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} \langle \theta, \phi | l, m \rangle \quad (21-40)$$

$$= \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (21-41)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} Y_{lm}(\theta, \phi) = im Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (21-42)$$

Bu diferansiyelin çözümü

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = P_{lm}(\theta) e^{im\phi} \quad (21-43)$$

olur.

$m = l$ uzatılmış durumu $L_+ | l, m = l \rangle = 0$ ile özdeşleştirilir veya

$$\hbar e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) Y_l(\theta, \phi) = 0, \quad (21-44)$$

$$e^{i\phi} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} + i \cot \theta \frac{\partial}{\partial \phi} \right) P_l(\theta) e^{il\phi} = 0, \quad (21-45)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) P_l(\theta) e^{(l+1)\phi} = 0, \quad (21-46)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \theta} - l \cot \theta \right) P_l(\theta) = 0, \quad (21-47)$$

çözümü ise $P_l(\theta) = (\sin \theta)^l$. Sonuç olarak,

$$Y_l(\theta, \phi) = C_l (\sin \theta)^l e^{il\phi}. \quad (21-48)$$

HO'da olduğu gibi, $m < l$ için öz durumlar L_- yi Y_l 'ye uygulayarak bulunabilir

$$Y_l(\theta, \phi) = c (\hat{L}_-)^{l-m} (\sin \theta)^l e^{il\phi}, \quad (21-49)$$

burada $\hat{L}_-$ işlemcisi sayfa XXI-5'te verilmiştir. Bunlar **küresel harmonikler** olup, şöyle verilirler

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi}, \text{ for } m \geq 0 \quad (21-50)$$

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = Y_{lm}^*, \text{ for } m \geq 0 \quad (21-51)$$

burada $P_{lm}(\cos\theta)$ **yardımcı Legendre polinomlarıdır**.

$$P_l^m(u) = (-1)^{l+m} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{(1-u^2)^{-\frac{m}{2}}}{2^l l!} \left(\frac{d}{du} \right)^{l-m} (l-u^2)^l, \text{ for } m \geq 0 \quad (21-52)$$

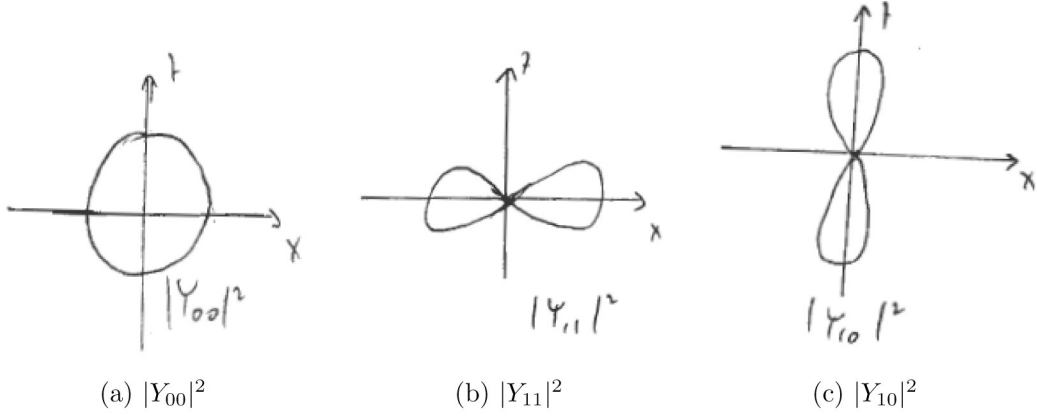
$$P_l^{-m}(u) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(u) \quad (21-53)$$

Birinci küresel harmonikler şunlardır:

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \quad \left. \vphantom{Y_{00}} \right\} l = 0 \quad (21-54)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \\ Y_{10} &= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cos \theta \\ Y_{1,-1} &= +\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta \end{aligned} \right\} l = 1 \quad (21-55)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_{22} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{2i\phi} \sin^2 \theta \\ Y_{21} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta \\ Y_{20} &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \theta - 1) \\ Y_{2,-1} &= -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} e^{-i\phi} \sin \theta \cos \theta \\ Y_{2,-2} &= \sqrt{\frac{15}{32\pi}} e^{-2i\phi} \sin^2 \theta \end{aligned} \right\} l = 2 \quad (21-56)$$



Şekil III: Başlangıç noktasından değişme yapan eğrinin verilen bir yöndeki mesafesi $|Y_{lm}|^2$ nin değerini verir.

Açısal momentumun kuantum mekanik özelliğinin geometrik yorumu

Klasik olarak bir nesnenin açısal momentumunu tamamen bir eksene örneğin z -eksenine yönlendirilebilir. Bu takdirde klasik olarak $(L_z^2)_{cl} = (\mathbf{L}^2)_{cl}$ ve $L_x = L_y = 0$ olur. **KM**'de ise L_z ve L_x sıra değiştirmedikinden, aralarında bir Heisenberg belirsizliği öngörür. Kuantum mekaniksel olarak, açısal momentumun en büyük z -bileşenidir ki burada verilen bir toplam açısal momentum l için $m = l$ olur, ancak

$$\langle l, m = 1 | \mathbf{L}^2 | l, m = l \rangle = \hbar^2 l(l + 1) \quad (21-57)$$

$$> \langle l, m = 1 | L_z^2 | l, m = l \rangle \quad (21-58)$$

$$= \hbar^2 l^2 \quad (21-59)$$

Sonuç olarak, bazı açısal momentum bazı başka yönü göstermelidir:

$$L_x^2 + L_y^2 = \mathbf{L}^2 - L_z^2 \quad (21-60)$$

$$= \hbar^2 l(l + 1) - \hbar^2 l^2 \quad (21-61)$$

$$= \hbar^2 l \quad (21-62)$$

$$\neq 0 \quad (21-63)$$

Böylece $\sqrt{l}\hbar$ açısal momentumu başka yönü göstermek üzere mevcuttur.

Uzatılmış $m = l$ durumunda L_x, L_y 'yi analiz edelim:

$$\langle L_x \rangle_{m=l} = \langle l, m | L_x | l, m \rangle \quad (21-64)$$

$$= \langle l, m | \frac{1}{2} (L_+ + L_-) | l, m \rangle \quad (21-65)$$

$$= \frac{1}{2} (\langle l, m | l, \widetilde{m} + 1 \rangle + \langle l, m | l, \widetilde{m} - 1 \rangle) \quad (21-66)$$

$$= 0 \quad (21-67)$$

zira farklı kuantum sayılı durumlar birbirlerine diktirler. Böylece, $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ olur. (Benzer şekilde L_y için). Bu takdirde, kayıp açısal momentum nerededir?

$$\langle L_x^2 \rangle_{l=m} = \frac{1}{4} \langle l, m | (L_+ + L_-)^2 | l, m \rangle \quad (21-68)$$

$$= \frac{1}{4} \langle l, m | L_+^2 + L_+ L_- + L_- L_+ + L_-^2 | l, m \rangle \quad (21-69)$$

$$= \frac{1}{4} \langle l, m | L_+ L_- + L_- L_+ | l, m \rangle \quad (21-70)$$

$$= \frac{1}{4} \langle l, m | \mathbf{L}^2 - L_z^2 + \hbar L_z + \mathbf{L}^2 - L_z^2 - \hbar L_z | l, m \rangle \quad (21-71)$$

$$= \frac{1}{2} \langle l, m = l | \mathbf{L}^2 - L_z^2 | l, m \rangle \quad (21-72)$$

$$= \frac{1}{2} l(l+1)\hbar^2 - l^2\hbar^2 \quad (21-73)$$

$$= \frac{l}{2} \hbar^2 \quad (21-74)$$

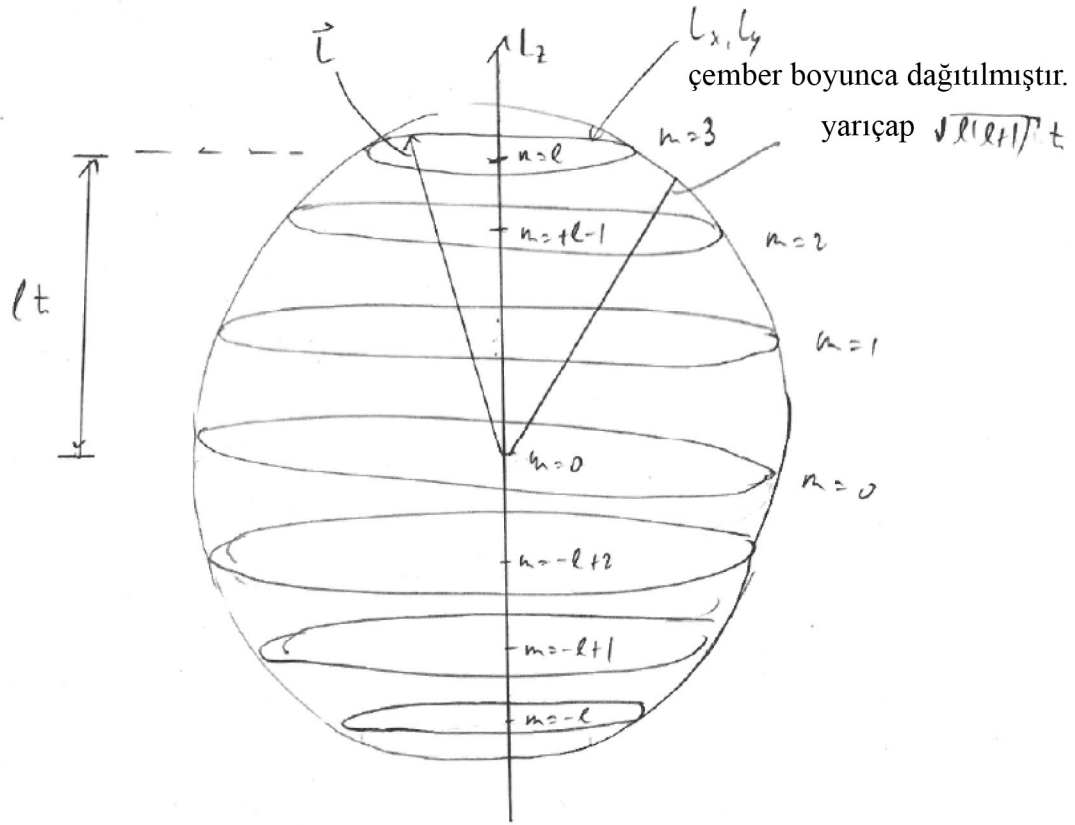
ve benzer şekilde $\langle L_y^2 \rangle$ için:

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{l}{2} \hbar^2 \quad (21-75)$$

$\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ olmasına rağmen, x - ve y - bileşenlerinde bazı açısal momentum belirsizlik olarak bulundurulur. l sabit olduğundan, açısal momentum için aşağıdaki geometrik şekli çizebiliriz:

Not. z -yönü hakkında özel bir şey yoktur, örneğin x eksenini bolunca maksimum yönelmiş $m = l$ (veya başka bir yönde)'yi $|l, m\rangle$ durumlarının bir lineer bileşimi ile hazırlayabilirdik.

$$|l, m = l\rangle_x = \sum_{m=-l}^l c_m |l, m\rangle_z \quad (21-76)$$



Şekil IV: $|l, m\rangle$ verilen durumu için, açısal momentum verilen m -değerine karşı gelen çember boyunca yönlendirilir, ancak bu yönü önceden tahmin edemeyiz, yani, L_x ve L_y bileşenlerini.