

Harmonik Salıncı (HO)

Harmonik salıncı bir m kütesine etki eden bir geri çağırıcı kuvvetin etkisiyle ortaya çıkar ki bu kuvvet başlangıç noktasından itibaren yerdeğiştirme ile orantılıdır. Bu problemin çözümü, dalga fonksiyonunun sonsuzda gerekli davranışı ile özdeğerlerin belirlenmesine örnek teşkil etmesi bakımından ilginçtir. KM'de karşımıza çıkan bazı durumlar, örneğin kapalı bir kaptan e.m. dalganın ışıması, katı ve sıvılarda ses dalgalarının yayılması gibi olaylar bir harmonik salıncıyla eşdeğer olup, bunların ele alınması burada geliştirilen kavramlarla çözülebilir.

n-boyutlu HO'nun dalga denklemi:

$$\left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2 \right) u_n = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \frac{1}{2} kx^2 u_n = E u_n \quad (*)$$

olup, $y = \alpha x$, $\alpha^4 = \frac{mk}{\hbar^2} = \left(\frac{m\omega}{\hbar} \right)^2$, $\omega^2 = \frac{k}{m}$ ve $\epsilon_m = \frac{2E}{\hbar\omega}$

(*) denk.de yerine yazarsak,

$$\frac{d^2 u_n}{dy^2} + (\epsilon_m - y^2) u_n = 0 \quad (2*)$$

$y^2 \gg \epsilon_m$ için u_n 'nin davranışı $e^{-(\frac{1}{2})y^2}$ terimi ile belirlenir.

Böylece,

$$u_n(y) = H_n(y) e^{-\frac{1}{2}y^2} \quad (3*)$$

çözümünü Kabul etmemiz doğaldır. Burada $H_n(y)$ sonlu merteye bir polinomdur.

(3*) denk.ni (2*) denk.de yerine yazarsak,

$$\frac{d^2 H_n}{dy^2} - 2y \frac{dH_n}{dy} + (\epsilon_m - 1) H_n = 0 \quad (4*)$$

bulunur. Bir güç serisi açılımını kabul edersek,

$$H_n(y) = y^s (a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \dots) \quad (5*)$$

burada $s = 0$ ve $a_0 \neq 0$ dır.

$u_n(y)$ sonsuzda $u_0(y) = e^{-\frac{1}{2}y^2}$ ile çarpılır. Sonuç olarak, seriyi bir yerde sonlandırmalıyız, buda m nin bazı değerleri için $\epsilon_m = 2m + 1$ olmasını gerektirir. Böylece

$$E_n = \frac{\hbar\omega}{2}\epsilon_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \text{HO enerji düzeyleri} \quad (18-1)$$

Bir harmonik osilatörün kuantumlanmış enerji düzeyleri. Taban durumu (sıfır noktası) enerjisi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ olup, enerji düzeyleri eşit aralıklıdır.

Not. Bu özellik HO'ü yalnızca kuyudaki bir parçacık potansiyeli $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$ ile özdeşleşmeye değil aynı zamanda etkileşmeyen bir (bozon) parçacıkları sistemiyle de özdeşleştirmeye imkan verir. Böylece, ω frekanslı bir elektromanyetik alanın bir kipi, HO'nın ω frekansı olarak görülebilir; bu kipteki n adet foton, HO'nın n -inci dolu durumuna karşı gelir. HO taban durumunun x ve p 'sinde ki belirsizlik, elektromanyetik alanın "vakum sapmalarına" yani $\langle x \rangle = 0$, $\langle x^2 \rangle \neq 0$ karşı gelirki bu da $\langle \mathbf{E} \rangle = 0$, $\langle \mathbf{E}^2 \rangle \neq 0$, vb. demektir.

$\epsilon = 2n + 1$ verildiğinde, tekrarlama bağıntısı (*)

$$(m+1)(m+2)c_{m+2} = (2m - \epsilon_n + 1)c_m = (2m - 2n)c_m \quad (18-2)$$

verir.

- $c_2 = -\frac{2n}{1 \cdot 2}c_0$
- $c_4 = \frac{4-2n}{3 \cdot 4}c_2 = \frac{(4-2n)(0-2n)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}c_0$

ve genel olarak

$$c_{2k} = (-2)^k \frac{n(n-2) \cdots (n-2k+4)(n-2k+2)}{(2k)!} c_0, \quad 0 \leq 2k \leq n, \quad n \text{ çift} \quad (18-3)$$

çift katsayılar için.

Tek katsayılar için ise

- $c_3 = \frac{(2-2n)}{2 \cdot 3}c_1 = (-2)^{\frac{n-1}{2}}c_1$
- $c_5 = \frac{6-2n}{4 \cdot 5}c_3 = (-2)^{\frac{n-3}{2}}c_3 = (-2)^2 \frac{(n-3)(n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}c_1$

ve genel olarak

$$c_{2k+1} = (-2)^k \frac{(n-1)(n-3) \cdots (n-2k+3)(n-2k+1)}{(2k+1)!} c_1, \quad 0 \leq 2k+1 \leq n, \quad n \text{ tek.} \quad (18-4)$$

Enerjisi $E_n = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$ olan n -inci enerji düzeyinin özfonksiyonu $u_n(x)$ şu şekilde verilir.

$$u_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y} \sum_{k=0}^{n/2} c_{2k} y^{2k} \quad \text{çift } n, \quad (18-5)$$

$$u_n(y) = e^{-\frac{1}{2}y} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} c_{2k+1} y^{2k+1} \quad \text{tek } n, \quad (18-6)$$

c_0 veya c_1 katsayıları o şekilde seçilmelidir ki dalga fonksiyonu normalleşmiş olsun ve y konum koordinatı x 'e $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ ile bağlantılıdır. $\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$ niceliği uzunluk boyutunda olup, harmonik osilatörün doğal kuantum uzunluk ölçeğini belirler. Normalleşmeden başka, şu polinomlar

$$h_n(y) = \sum_{k=0}^{n/2} c_{2k} y^{2k} \quad (18-7)$$

$$h_n(y) = \sum_{k=0}^{(n+1)/2} c_{2k+1} y^{2k+1} \quad (18-8)$$

Hermite polinomları $H_n(y)$ olarak bilinir. Hermite polinomları şu bağıntılara tabidirler:

$$H_n''(y) - 2yH_n'(y) + 2nH_n(y) = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{tanım denklemi}) \quad (18-9)$$

$$H_{n+1}(y) - 2yH_n(y) + 2nH_{n-1}(y) = 0 \quad (18-10)$$

$$H_{n+1}(y) - H_n'(y) + 2yH_n(y) = 0 \quad (18-11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} H_n(y) \frac{z^n}{n!} = e^{2zy - z^2} \quad (18-12)$$

$$H_n(y) = (-1)^n e^{y^2} \left(\frac{d}{dy} \right)^n e^{-y^2} \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{c} \text{Hermite polinomlarının} \\ \text{farklı tanımı} \end{array} \right) \quad (18-13)$$

n -inci düzeye ait dalga fonksiyonu $u_n(y) = C e^{-\frac{1}{2}y^2} H_n(y)$ olduğundan, bunu normalleştirmek için aşağıdaki integrali hesaplamak zorundayız.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dy |u_n(y)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dy |C|^2 e^{-y^2} H_n^2(y) \quad (18-14)$$

Hermite polinomları gerçeldir. Şunu gösterebiliriz ki

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-y^2} H_n^2(y) = 2^n n! \sqrt{\pi}} \quad (18-15)$$

Normalleştirme gerçekten $\int_{-\infty}^{\infty} dx |u_n(x)|^2 = 1$ olmasını gerektirir, ancak x ve $y = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ sabit bir çarpanla bağlantılı olup, $\int_{-\infty}^{\infty} dx |u_n(x)|^2 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \int_{-\infty}^{\infty} dy |u_n(y)|^2$

$$H_0(y) = 1 \quad (18-16)$$

$$H_1(y) = 2y \quad (18-17)$$

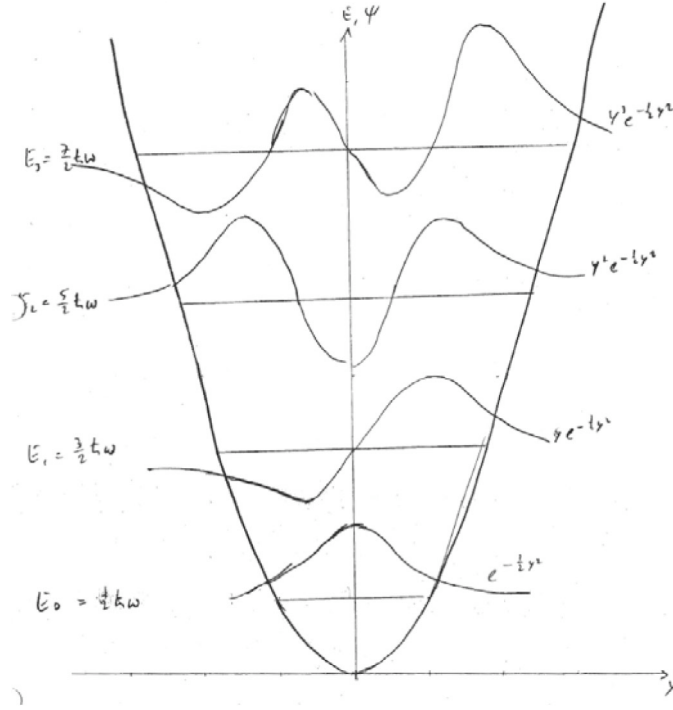
$$H_2(y) = 4y^2 - 2 \quad (18-18)$$

$$H_3(y) = 8y^3 - 12y \quad (18-19)$$

$$H_4(y) = 16y^4 - 48y^2 + 12 \quad (18-20)$$

$$H_5(y) = 32y^5 - 160y^3 + 120y \quad (18-21)$$

Sonuç olarak, en düşük özfonksiyonlar (Şekil I) deki gibi olur. HO'nun özfonksiyonları



Şekil I: HO özfonksiyonları

momentum uzayında aynı olurlar zira Hamiltonyen x ve p 'ye göre simetriktir ve

$$\hat{x} = x, \quad \hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \quad \text{konum uzayında } \psi(x) \quad (18-22)$$

$$\hat{x} = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}, \quad \hat{p} = p \quad \text{momentum uzayında } \phi(p) \quad (18-23)$$

Kompleks fazın konumsal bağımlılığı olmayan bir Gauss fonksiyonu olmasından dolayı harmonik osilatörün taban durumu, Heisenberg bağıntısı ile izinli minimum bir belirsizliğe sahiptir:

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} \quad \text{taban durumu için} \quad (18-24)$$

$$\Delta x \Delta p > \frac{\hbar}{2} \quad \text{herhangi uyarılmış durum için} \quad (18-25)$$

- Bose-Einstein yoğuşma genişlemesini gösteririz

- Isıl bulut

- izotrop olmayan tuzakta izotrop genişleme

$$\left(\frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2} kT \right)$$

- yoğuşma:

$$\frac{p^2}{2m} \propto \frac{1}{x_0^2} \propto \frac{m\omega}{\hbar} \rightarrow \text{izotrop olmayan genişleme}$$

HO: İşlemci yöntemi

SD'ni doğrudan çözmeden HO öz durumlarını elde etmek için öğretici ve gösterişli bir yol vardır. Bunun yerine işlemciler arasındaki sıra değişirme bağıntılarını kullanacağız. İşe Hamiltonu boyutsuz şekilde yazmakla başlayalım

$$H = \hbar\omega \left[\frac{p^2}{2m\hbar\omega} + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 \right] \quad (18-26)$$

$$= \hbar\omega \left[\left(\frac{p}{\sqrt{2m\hbar\omega}} \right)^2 + \left(\frac{x}{\sqrt{2\hbar/m\omega}} \right)^2 \right] \quad (18-27)$$

$$= \hbar\omega \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^2 + \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right] \quad (18-28)$$

burada $p_0^2 = 2m\hbar\omega$, $x_0^2 = \frac{2\hbar}{m\omega}$. Klasik olarak yazabiliriz ki

$$H_{cl} = \hbar\omega \left(\frac{x}{x_0} - i \frac{p}{p_0} \right) \left(\frac{x}{x_0} + i \frac{p}{p_0} \right), \quad (18-29)$$

ancak, **KM**'de $\hat{p}$ ve $\hat{x}$ sıra değişirme yapmadığından

$$\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) = \left(\frac{\hat{x}}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\hat{p}}{p_0} \right)^2 \quad (18-30)$$

$$= \left(\frac{\hat{x}}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\hat{p}}{p_0} \right)^2 + \frac{i}{x_0 p_0} [\hat{x}, \hat{p}]. \quad (18-31)$$

Sıra değişimini kullanarak $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar \frac{\partial}{\partial p} p - p i\hbar \frac{\partial}{\partial p} = i\hbar$ ve $\frac{1}{\lambda_0 p_0} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} = \frac{1}{2\hbar}$

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\left(\frac{\hat{x}}{x_0} \right)^2 + \left(\frac{\hat{p}}{p_0} \right)^2 \right) \quad (18-32)$$

$$= \hbar\omega \left(\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) - i \frac{1}{x_0 p_0} [\hat{x}, \hat{p}] \right) \quad (18-33)$$

$$= \hbar\omega \left(\left(\frac{\hat{x}}{x_0} - i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right) + \frac{1}{2} \right) \quad (18-34)$$

Yeni bir Hermitsel olmayan işlemciyi tanımlarsak,

$$\hat{a} := \frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \quad (18-35)$$

sonuçta, Hermitsel eşlenik işlemci

$$\hat{a}^\dagger = \left(\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0} \right)^\dagger = \frac{\hat{x}}{x_0} - i \frac{\hat{p}}{p_0} \quad (18-36)$$

olur, zira $\hat{p}^\dagger = \hat{p}$, $\hat{x}^\dagger = \hat{x}$

Not. Herhangi bir $O^\dagger$ işlemcisinin Hermitsel eşlenik işlemcisi herhangi iyi davranışlı dalga fonksiyonları $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ için şöyle tanımlanmıştır

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_2^*(x) O^\dagger \psi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx (O \psi_2(x))^* \psi_1(x) \quad (18-37)$$

Sonuç olarak, herhangi bir işlemci $\hat{O} = c_1 \hat{O}_1 + c_2 \hat{O}_2$ için ki burada c_1 ve c_2 karmaşık sayılardır.

$$\hat{O}^\dagger = (c_1 \hat{O}_1 + c_2 \hat{O}_2)^\dagger = c_1^* \hat{O}_1^\dagger + c_2^* \hat{O}_2^\dagger \quad (18-38)$$

ve herhangi bir işlemci için $\hat{O} = \hat{O}_1 \hat{O}_2^\dagger$ ve $\hat{O}^\dagger = (\hat{O}_1 \hat{O}_2)^\dagger = \hat{O}_2^\dagger \hat{O}_1^\dagger$ olur.

İspat. Bkz. Problem takımı.

$\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ işlemcilerini kullanarak, HO için Hamiltonu en basit şekilde

$$\boxed{\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right)} \quad (18-39)$$

$\hat{x}$, $\hat{p}$ cinsinden açıkça tanımlamak yerine bir işlemci, diğer işlemcilerle sıra değişme bağıntıları yoluyla tanımlanabilir. Şimdi $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ 'ya bakalım:

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \left[\frac{\hat{x}}{x_0} + i \frac{\hat{p}}{p_0}, \frac{\hat{x}}{x_0} - i \frac{\hat{p}}{p_0} \right] \quad (18-40)$$

$$= i \left[\frac{\hat{p}}{p_0}, \frac{\hat{x}}{x_0} \right] - i \left[\frac{\hat{x}}{x_0}, \frac{\hat{p}}{p_0} \right] \quad (18-41)$$

$$= \frac{i}{p_0 x_0} ([\hat{p}, \hat{x}] - [\hat{x}, \hat{p}]) \quad (18-42)$$

$$= \frac{i}{2\hbar} 2 [\hat{p}, \hat{x}] \quad (18-43)$$

$$= \frac{i}{\hbar} \frac{\hbar}{i} \quad (18-44)$$

$$= 1, \quad (18-45)$$

burada kullandığımız $[\hat{x}, \hat{x}] = 0 = [\hat{p}, \hat{p}]$. Böylece

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (18-46)$$

$$[\hat{a}, \hat{a}] = [\hat{a}^\dagger, \hat{a}^\dagger] = 0 \quad (18-47)$$

olur.

8.06'da ele alınacağı üzere bu bozonik (yaklaşık) parçacıklar için bir sıra değiştirme bağıntısını belirler ki bunların dalga fonksiyonu iki parçacığın değiş-tokuşu altında simetriktr. Hamilton ile sıra değişenler için,

$$[\hat{H}, \hat{a}] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}] \quad (18-48)$$

$$= \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (18-49)$$

$$= \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - (1 + \hat{a}^\dagger \hat{a}) \hat{a}) \quad (18-50)$$

$$= -\hbar\omega \hat{a} \quad (18-51)$$

yazılabilir ve

$$[\hat{H}, \hat{a}^\dagger] = \hbar\omega [\hat{a}^\dagger \hat{a}, \hat{a}^\dagger] \quad (18-52)$$

$$= \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger \hat{a}^\dagger \hat{a}) \quad (18-53)$$

$$= \hbar\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger (\hat{a} \hat{a}^\dagger - 1)) \quad (18-54)$$

$$= \hbar\omega \hat{a}^\dagger \quad (18-55)$$

Şimdi basitçe yukarıdaki sıra değiştirme bağıntılarını kullanarak HO'nın öz enerjilerinin spektrumunu hesaplamak durumundayız. İlk olarak dikkat edilecek şey, $\hat{H}$ 'ın x ve p 'ye göre kuadratik olmasından dolayı, tüm özdeğerlerin pozitif olması zorunluluğudur:

$$\langle E \rangle = \langle \hat{H} \rangle = \langle T \rangle + \langle V \rangle \quad (18-56)$$

$$= \frac{1}{2m} \int dp \phi^*(p) p^2 \phi(p) + \frac{1}{2} m \omega^2 \int dx \psi^*(x) x^2 \psi(x) > 0 \quad (18-57)$$

bu durum herhangi $\psi(x)$ dalga fonksiyonu ve bunun Fourier dönüşümü $\phi(p)$ için geçerlidir. Öz spektrumu tayin etmeden önce, uygun bir yazılımı tanımlayalım.

Durum vektör yazılımı (Dirac yazılımı)

Daha önceden fiziksel bir durumun (yani başlangıç şartlarının **KM**'nin izin verdiği maksimum kapsamda hazırlanmış olduğu fiziksel bir sistem), soyut bir vektör uzayında (Hilbert uzayı) betimlendiğini tartışmıştık ki bir dalga fonksiyonu konum uzayında sadece bu durumun mümkün bir temsili olduğunu söylemiştik. Değişik olarak, bu durum bir momentum temsiliinde (momentum uzayındaki dalga fonksiyonu) betimlenebileceğini veyahut enerji öz durumlarının bazını açınım tabi tuttuğumuz zaman açınım katsayılarını belirlemek suretiyle aynı şeyi yapabileceğimizi tartışmıştık. **KM**'nin yaratıcılarından biri olan Pual Dirac'ın tanıttığı yazılımı kullanarak bu durumu şöyle yazabiliriz

$$|\psi\rangle \quad (18-58)$$

ve betimlersek

$$\langle\phi|\psi\rangle := \int dx \phi^*(x) \psi(x) \quad (18-59)$$

bu betimleme $|\psi\rangle$, $|\phi\rangle$ durumları için yapılırki bunların dalga fonksiyonları $\psi(x)$ ve $\phi(x)$ dir. Dirac'ın tanımlaması

$$\underbrace{\langle\phi|}_{\text{bra}} \underbrace{|}_{\text{-c-}} \underbrace{\psi\rangle}_{\text{ket}} \quad (18-60)$$

olup, burada $|\psi\rangle$ bir “ket” ve $\langle\phi|$ ise bir “bra” olarak bilinir. “bra”yı “ket” vektörünün bir devriği olarak düşünebilirsiniz.

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \cdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \end{pmatrix} = \text{c-sayısı (kompleks sayı)} \quad (18-61)$$

ancak bu sonsuz-boyutlu vektörler için mümkündür. Bu sandviç veya Dirac yazılımında, herhangi bir $\hat{A}$ işlemcisinin beklenti değeri şöylece verilir

$$\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle = \int dx \psi^*(x) \hat{A} \psi(x). \quad (18-62)$$

Dirac yazılımında

$$\langle\psi|\phi\rangle = \int dx \psi^*(x) \phi(x) = \left(\int dx \phi^*(x) \psi(x) \right)^* = \langle\phi|\psi\rangle^* \quad (18-63)$$

Bir duruma etki eden $\hat{A}$ işlemcisi diğer bir durumu üretirki, sembolik olarak

$$\hat{A} |\psi\rangle = |\hat{A}\psi\rangle \quad (18-64)$$

Sonuç olarak,

$$\langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle = \langle \phi | \hat{A} \psi \rangle = \int dx \phi^*(x) (\hat{A} \psi(x)) = \int dx \phi^*(x) \hat{A} \psi(x) \quad (18-65)$$

Hermitsel eşlenik işlemci $\hat{A}^\dagger$ şöyle tanımlanmıştır

$$\langle \phi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = \int dx (A\phi(x))^* \psi(x) = \left(\int dx \psi^*(x) (A\phi(x)) \right)^* \quad (18-66)$$

$$= \langle \psi | A\phi \rangle^* \quad (18-67)$$

$$= \langle A\phi | \psi \rangle \quad (18-68)$$

Dirac yazılımında, ortonormalleşme şartı $|n\rangle, |m\rangle$ öz durumları için

$$\langle n | m \rangle = \int dx u_n^*(x) u_m(x) = \delta_{nm}, \quad (18-69)$$

burada açınım katsayıları

$$c_n = \int dx u_n^* \psi(x) = \langle n | \psi \rangle. \quad (18-70)$$

$\langle a | b \rangle$ gibi bir braket karmaşık bir sayıdır, ancak $|b\rangle\langle a|$ gibi bir ketbra ise bir işlemcidir zira bir duruma etkimesi yeni bir durum oluşturur.

$$\underbrace{|b\rangle}_{\text{durum}} \underbrace{\langle a|}_{\text{c-sayısı}} \psi \rangle. \quad (18-71)$$

Tüm öz durumlar üzerine alınan $\sum_n |n\rangle\langle n|$ toplamı bir Hermitsel işlemcisi olup, bunun birim işlemci olduğu

$$\sum_n |n\rangle \langle n| = \hat{1}, \quad (18-72)$$

ve

$$|\psi\rangle = \hat{1} |\psi\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle = \sum_n c_n |n\rangle \rightarrow \left(\begin{array}{c} \text{öz durumlara} \\ \text{açınım} \end{array} \right) \quad (18-73)$$

gösterilebilir. HO'nun işlemci uğraşısına dönelim: enerji özdeğeri E olan bir enerji öz durumunu bulduğumuzu ve buna ait durumun $|E\rangle$ olduğunu kabul edelim. $\hat{a}$ işlemcisinin $|E\rangle$ 'ye etkisiyle yeni bir durumun ortaya çıktığını tanımlayalım, $|\psi\rangle := \hat{a} |E\rangle$. Bu duruma Hamiltonun etkisiyle ne olacaktır?

$$\hat{H} |\psi\rangle = \hat{H} \hat{a} |E\rangle \quad (18-74)$$

$$= \left([\hat{H}, \hat{a}] + \hat{a} \hat{H} \right) |E\rangle \quad (18-75)$$

$$= (-\hbar\omega \hat{a} + \hat{a} E) |E\rangle \quad (18-76)$$

$$= (E - \hbar\omega) \hat{a} |E\rangle \quad (18-77)$$

$$= (E - \hbar\omega) |\psi\rangle \quad (18-78)$$

Burada sıra değiştirici için hesaplanan $[\hat{H}, \hat{a}] = -\hbar\omega\hat{a}$ sonucunu ki bunu önceden bulmuştuk ve karmaşık (burada gerçel) sayıların herşeyle sıra değiştirmesi gerçeğini kullandık. Yukarıdaki bağıntı, $|\psi\rangle$ 'ın aynı zamanda bir enerji özdurumu olduğunu, ancak daha düşük bir enerjiye $E = -\hbar\omega$ sahip olduğunu belirtir. Herhangi bir öz durum $|E\rangle$ den başlayarak, bu işlemi çok sayıda tekrar edebileceğimizden dolayı,

$$\hat{a}^n |E\rangle = |E - n\hbar\omega\rangle, \quad (18-79)$$

olur ve enerji özdurumu pozitif kalmak zorundadır, (herhangi bir durum için $\langle\psi|\hat{H}|\psi\rangle > 0$ olduğunu göstermiştik) ve $|0\rangle$ gibi bir durum var olmalıdır ki

$$\hat{a} |0\rangle = 0 \quad (18-80)$$

yani, enerjisi daha da düşürülemeyen bir durum ortaya çıkar.

Not. $|0\rangle$ (Hilbert uzayında en düşük enerji özdurumu) ile 0 (Hilbert uzayındaki sıfır, sıfır uzunluklu vektörü) birbirinden ayırdetmek önemlidir.

Not. Hiçbirşey $|0\rangle$ durumunun sıfır enerjiye sahip olduğunu göstermez. Gerçekten de,

$$\hat{H} |0\rangle = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) |0\rangle \underset{\hat{a}|0\rangle=0}{=} \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle, \quad (18-81)$$

öyle ki taban durumunda özenjerji $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$ olup, buna sıfır-noktası enerjisi denilir. ω frekanslı bir elektromanyetik kipli, ω frekanslı bir HO'ün belirlenmesi kapsamında, $|0\rangle$ taban durumuna boşluk (vakum) adı verilir (taban durumunun hiçbir uyarılmış hali yoktur, foton sayısı sıfırdır): boşluğın sonlu bir vakum enerjisi $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$ vardır.

Eğer $\hat{a}^\dagger$ taban durumuna etki ederse ne olur? şimdi tanımlarsak

$$|\tilde{1}\rangle := \hat{a}^\dagger |0\rangle. \quad (18-82)$$

yazılabilir. Buradaki $\sim$ işareti bize bu durumun normalleştirilmesinin gerekli olmadığını hatta bunun $|0\rangle$ 'nin normalleşmiş seğilmesi halinde bile geçerli olduğunu hatırlatır.