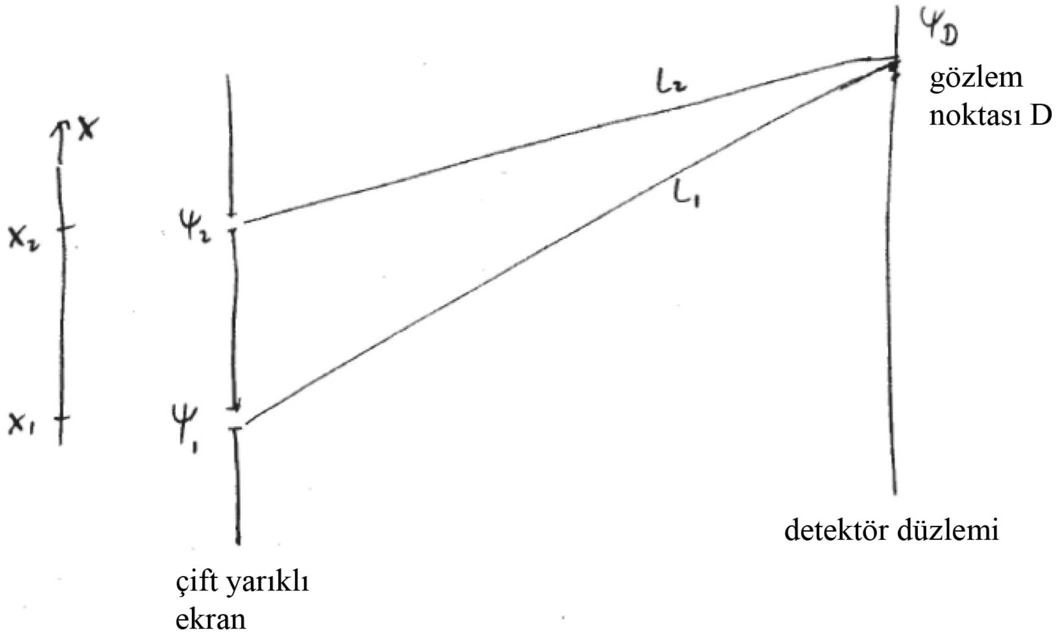
Çift yarık: Foton saçılımı ve girişim deseninin matematiksel modeli

Girişim olayına ait daha çok sezgi geliştirmek üzere; kuantum sistemi ve (klasik) gereç arasındaki eşilişkilerin kuantum mekaniğinin tam özünde yatarken, girişim deseninin nasıl teşkil edildiğini ve foton saçılımının elektron dalga fonksiyonunu nasıl değiştirdiğini gösteren kuralları ortaya koyacağız.



Şekil I: Çift-yarık girişimi

Kural 1. 1 ve 2 yarıklarındaki dalga fonksiyonu:

$$\psi_1 = Ae^{i\phi_1} \qquad\qquad \psi_2 = Ae^{i\phi_2} \tag{7-1}$$

A kompleks sayıları gerçeldir. Gelen düzlem dalga için ve gözlem yoksa:

$$\phi_1 = \phi_2 \tag{7-2}$$

Kural 2. Gözlem noktası *D* deki dalga fonksiyonu

$$\psi_D = \psi_1 e^{i2\pi L_1/\lambda} + \psi_2 e^{i2\pi L_2/\lambda} \tag{7-3}$$

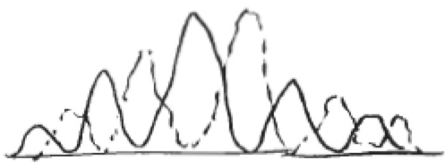
$$\psi_D = \psi_1 e^{ikL_1} + \psi_2 e^{ikL_2} \tag{7-4}$$

ile verilir ki burada λ deBroglie dalga boyu ve parçacığın ilgili dalga vektörü $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dür.

Kural 3. Gözlem noktasındaki şiddet (dolayısıyla parçacık ulaşım hızı) şununla orantılıdır:

$$\begin{aligned}|\psi_{\rm D}|^2 &= \left|\psi_1 e^{ikL_1} + \psi_2 e^{ikL_2}\right|^2 \\ &= |A|^2 \left|e^{i(kL_1+\phi_1)} + e^{i(kL_2+\phi_2)}\right|^2 \\ &= |A|^2 \left\{e^{i(kL_1+\phi_1)} + e^{i(kL_2+\phi_2)}\right\} \cdot \left\{e^{-i(kL_1+\phi_1)} + e^{-i(kL_2+\phi_2)}\right\} \\ &= |A|^2 \left\{1 + 1 + e^{i(kL_1+\phi_1-kL_2+\phi_2)} + e^{-i(kL_1+\phi_1-kL_2+\phi_2)}\right\} \\ &= |A|^2\{2 + 2\cos(kL_1 + \phi_1 - kL_2 - \phi_2)\} \\ &= 2|A|^2\{\underbrace{1}_{\text{temel terim}} + \underbrace{\cos(k(L_1 - L_2) + (\phi_1 - \phi_2))}_{\text{girişim terimi}}\}\end{aligned} \tag{7-5}$$

İki yarıkta dalga fonksiyonunun bağıl fazını ($\phi_1 - \phi_2$) değiştirerek, gözlem düzleminde girişim deseninin kaymasına yol açılır. ($\phi_1 - \phi_2$) yi π'ye eşdeğer olan bir değiştirme, ($L_1 - L_2$) yi $\frac{\lambda}{2}$ kadar değiştirmek demektir ki bu açı değişimine eşdeğerdir. İki yarıktaki keyfi bağıl fazlar ($\phi_1 - \phi_2$) üzerinde ortalama alırsak, girişim deseni ve girişim terimi ortadan kaybolur.



Şekil II: Keyfi kaymalı girişim desenleri üzerine alınan ortalama

Kural 4. **x** konumundaki bir elektron, $\mathbf{k}_{in}$ gelen dalga vektörüne sahip bir fotonu, $\mathbf{k}_{out}$ la tanımlanmışbir fotonu yeni bir yöne saçıldırırsa, bunun dalga boyu **x** konumumda bir faz kaymasına uğrar $\phi_{sc} = (\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}) \cdot \mathbf{x} \Rightarrow$ bu **KM** momentumun korunumu ifadesidir ki ($\mathbf{p}_{in} = \hbar\mathbf{k}_{in}$, $\mathbf{p}_{out} = \hbar\mathbf{k}_{out}$, gelen ve saçılan foton momentumlarıdır).

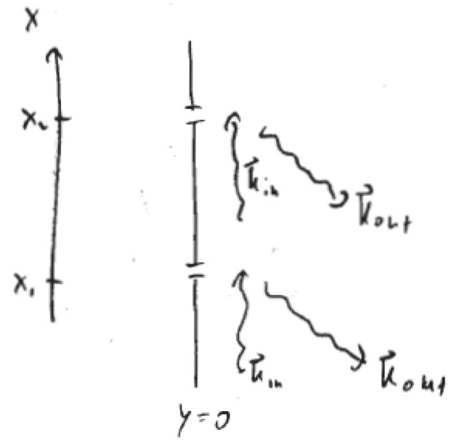
Saçınmadan önce 1,2 yarıklarında dalga fonksiyonları:

$$\psi_1 = Ae^{i\phi_1} = A \qquad\qquad \psi_2 = Ae^{i\phi_2} = A \tag{7-6}$$

$\mathbf{k}_{in}$'i $\mathbf{k}_{out}$ saçıldırdıktan sonra:

$$\psi_1 = Ae^{i(\mathbf{k}_{\rm in}-\mathbf{k}_{\rm out})\cdot\mathbf{x_1}} \qquad\qquad \psi_2 = Ae^{i(\mathbf{k}_{\rm in}-\mathbf{k}_{\rm out})\cdot\mathbf{x_2}} \tag{7-7}$$

$\rightarrow$ 1'nci yarıkta $\qquad\qquad$ $\rightarrow$ 2'nci yarıkta (7-8)



$\mathbf{k}_{in}$ = gelen;

$\mathbf{k}_{out}$ = saçınan dalga vektörleri

Şekil III: Çift yarıktan geçen bir elektron bir fotonu saçıldırıyor

Yorum. Elektronun momentum aktarımı.

Verilen bir yöndeki bir foton saçılımı dalga fonksiyonunu yok edemez veyahut "çöktüre"mez. **O sadece onun fazını kaydırır**. Daha önceki hesabı tekrarlarsak, gözlem düzlemindeki şiddet bu durumda:

$$|\psi'_D|^2 = 2|A|^2\{1 + \cos[(k(L_1 - L_2) + (\mathbf{k}_{\text{in}} - \mathbf{k}_{\text{out}})(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)]\} \tag{7-9}$$

bulunur. Dikkatli olarak şunları birbiriyle karıştırmayınız:

- $\mathbf{k} \rightarrow$ *parçacığın dalga vektörü*
- $\mathbf{k}_{in}$, $\mathbf{k}_{out} \rightarrow$ *gelen ve saçılan fotonun dalga vektörü*

$\mathbf{k}_{out}$ saçılan foton dalga vektörüyle belirlenmiş olan tek bir saçılma olayıyla ilgili olmak üzere detektör düzleminde elektron girişiminin (mükemmel olarak iyi betimlenmiş) bir faz kayması vardır. Saçılan fotonların $\hbar\mathbf{k}_{out}$ momentumu detektör düzleminde elektronun girişim deseninin kaymasıyla mükemmel bir uyuşma gösterir.

Gürültüden eşilişkiler yoluyla girişim deseninin tekrar teşkili (şartlı girişim)

Ölçümü birçok defa tekrarlarsak, bunlardan herbiri farklı bir foton saçılma yönü $\mathbf{k}_{out}$ ve buna karşı gelen farklı bir faz kaymasına $(\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ sahip bir elektron girişim deseni oluşturur ve böylece ekrandaki elektron deseninde saçaklar gözükmeyecektir.

Şekil IV: Gelişigüzel fazlı girişim desenlerini ortalamak girişimi yok eder.

Şekil V: Saçılma olaylarının bir alt kümesi tek bir açıyla detektöre kaydedilirse sonuçta girişim olur.

Ancak, önceden belirlenmiş verilen bir yöndeki fotonu seçip bu fotonları kaydedersek, elektron gelişine ait bu alt küme seçilmiş bu yöndeki kayma ile belirlenmiş girişimi yavaşlatacaktır (yön $\mathbf{k}_{out}$). Girişim olayı daima burada olmakla birlikte, girişim deseninin farklı fazları üzerine alınan ortalama işlemi, ki aynı şey uyumlu foton yönlerinde de sözkonusudur, sonucunda girişim deseninin kaybolmasına sebep olur.

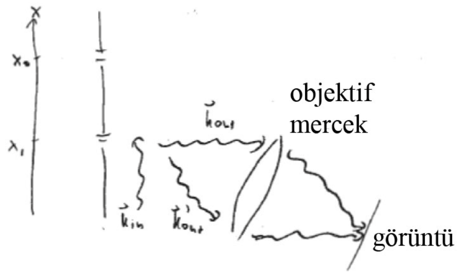
Yukarıdaki tartışma fotonlar boşluğa uçsalar bile ve elektronlar ilk önce gözlemlenmiş olsalar bile geçerlidir. Tüm foton yönlerine alınan ortalama yapılsa dahi hiçbir elektron girişim deseni meydana gelemez. Ancak, sadece belli bir yönde bir foton gözlemine karşı gelen elektron gelişlerini sonradan seçsek bile, öngörülen yönde bir girişim deseni meydana gelir (yani ekranda elektron gelişinden sonra foton gözlemi yapılsa bile aynı durum oluşur).

Kural 5. Bir **ölçüm**, ölçme sistemimizin **ve** detektörün birçok durumları üzerine alınan ortalama arasındaki etkileşmedir. (etkileşme burada: elektronun fotonu saçıldırması) ve detektör durumları ise (saçılmış foton yönlerini) gösterir. Detektör durumları üzerine alınan ortalama burada çok **önemlidir**. Bu ortalama işleminden önce, elimizde uyumlu (dolanık) bir sistem vardır ki burada kuantum sisteminin durumları (burada: elektron dalga fonksiyonunun fazı veyahut girişim deseninin konumu) detektörün durumlarının birbirleriyle ilintili (uyumlu) olduğunu göstermektedir.

"Eğer foton 1 yönünde saçılmış ise, girişim deseni de 1 konumundadır. Eğer foton 2 yönünde saçılmış ise, girişim desenide 2 konumundadır, …"

ortalamadan önce dolanık durumu betimlemiş olur.

Kullanılan ışığın dalga boyu çift yarığı optiksel olarak ayırmak için çok uzun ise ($\lambda_{foton} >> x_2 - x_1 = d$), bu takdirde maksimum faz kayması $2k_{in}(x_2 - x_1) = \frac{4\pi}{\lambda_{foton}}(x_2 - x_1) << 1$ olur ve tüm saçılan-foton açıları üzerinde ortalama alınsa bile girişim deseni hala varlığını sürdürecektir. Eğer, öte yandan, çift yarık yeterli çözünürlüğe sahip bir mikroskop ile gözlemlenirse (yani yeterince kısa foton dalga boyu mevcut ise) bu durumda mikroskop objektifi farklı açılarda saçımış fotonları toplayabilir ve $\mathbf{k}_{out}$ ve buna karşı gelen elektron fazları $(\mathbf{k}_{in} - \mathbf{k}_{out}) \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ üzerine alınan ortalama işlemi, elektron girişim desenini silip süpürür.



Şekil VI: Elektronun hangi yarıktan geçtiğini ayırdeden bir mikroskop elektronu görüntülemek için farklı açılarda saçılmış olan ışığın girişimini kullanır. Bu açılar detektör düzleminde elektron girişim deseninin farklı kaymalarına karşı gelir ki elektron girişimi silip süpürülmüştür.

Atom modeli: spektrum ve enerjinin kuantumlanması

Thomson modeli

Tek dalga boylu ışınım yapan elastik bağlı elektrona sahip olmak için J.J. Thomson, atomun "üzümlü kek" modelini ortaya koymuştur ki burada elektronlar yarıçapı ~1Å olan düzgün pozitif bir yük dağılımı içinde hapsedilmiştir.

x konumunda elektrona etki eden kuvvet:

$$F = -\frac{|qQ|\frac{x^3}{R^3}}{4\pi\epsilon_0 x^2} = -\frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0 R^3}x \qquad (7\text{-}10)$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} = -\frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}x \qquad (7\text{-}11)$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x \qquad \Longrightarrow \qquad \omega = \left[\frac{|qQ|}{4\pi\epsilon_0 R^3 m}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (7\text{-}12)$$

Hidrojen için:

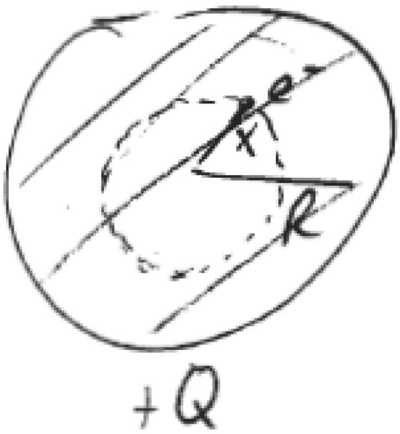
- $Q = +q_e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $q = -q_e$
- $m = m_e = 9 \cdot 10^{-31}$ kg
- $R = 10^{-10}$ m $\Longrightarrow \omega = 6 \cdot 10^{15}\ \frac{1}{\mathrm{s}}$
- $\lambda = \frac{c}{\nu} = 2\pi \frac{c}{\omega} = 150$ nm

Thomson modeli, harmonik olarak salınan bir elektronu ve dalga boyu için ise doğru mertebeli bir büyüklük (en kısa H-dalga Lyman α, $\lambda = 121$ nm) ortaya çıkarır ancak bu model diğer spektrum çizgilerini izah edemez.

Rutherford saçılımı

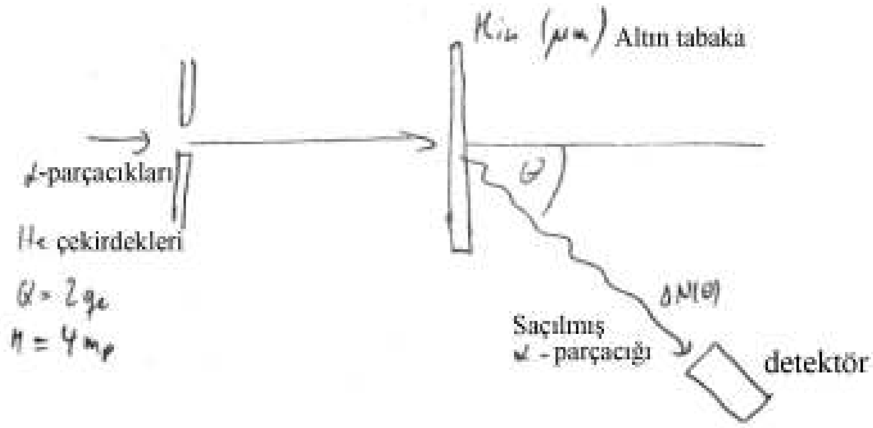
Kaynak, Marsden & Greiger 1906-, Rutherford 1911

Büyük açılı saçılım yoluyla çekirdeğin keşfi.

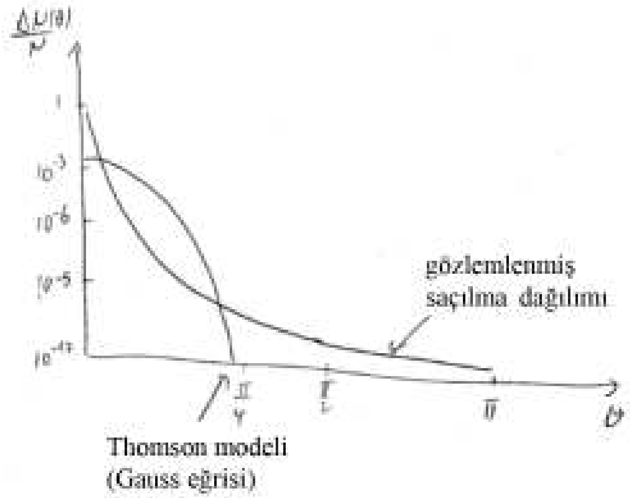


Şekil VII: Thomson'un "üzümlü kek" atom modelinde negatif yüklü elektron, pozitif yüklü çekirdeğin düzgün dağılımlı alanı içinde gömülü olarak bulunur.

Marsden & Geiger saçınmış α-parçacıklarının açısal dağılımını ölçtüler. Thomson modeline göre, pozitif yük atom içerisinde düzgün olarak dağılmış olup, atomlar bir katı düzeneğini alsalar bile çok az sapmaya sebep olunur. Ancak, gözlemlenen dağılım büyük saçılma açılarında farkedilir bir farklılık gösterir. Büyük saçılma açılarını gözlemlemek için, kütlesi büyük olan parçacıkları saçıldırmamız gerekir ki momentumun korunumu büyük açılara izin verebilsin. Gözlemler, niceliksel olarak çekirdeğin kütlesinin küçük bir hacimde yoğuşmuş olması kabulü ile izah edilebilir. Gözlemlenmiş saçınma açısına bağlılığın niceliksel betimlenmesi için tesir kesiti kavramına ihtiyaç duyarız.



Şekil VIII: α-parçacığı saçılımına ait Marsden ve Geiger deneyi; sonuçların Rutherford tarafından izahı.



Şekil IX: Altın tabakadan α-saçılımın açısal bağımlılığın gözlemi ve Thomson modelinden öngörü.

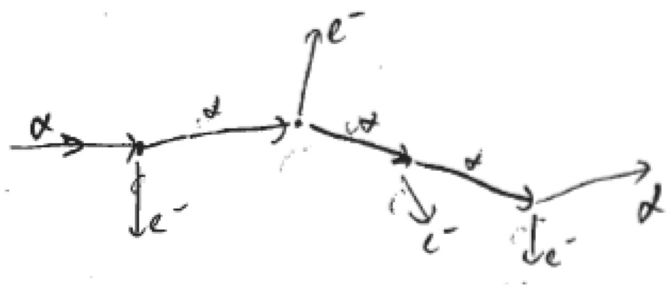
Thomson modelinin yetersizliği

Elektronlar bir α-parçacığına göre 4 · 1850 ~ 7000 kez daha hafiftir. Bu durumda momuntumun korunumu her α-parçacığı çarpışması başına $\phi_e \sim \frac{m_e}{m_p} \sim 10^{-4}$ olan küçük bir sapma açısına yol açar. Birçok saçılma olayları için difüzyon tipinde bir süreç (açıda gelişi güzel yürüme) bekleriz ve bu durumda saçılma açıları $\Delta\theta = \sqrt{M}\phi_e$ olmak üzere bir Gauss dağılımı ortaya çıkar ki burada M, α-parçacığı saçılma olaylarının ortalama sayısıdır.

Böylece özel bir θ açısına saçılma kesri:

$$\frac{\Delta N(\theta)}{N} = Ae^{-\frac{\phi^2}{2(\Delta\theta)^2}} = Ae^{-\frac{\phi^2}{2M\phi_e^2}} = Ae^{-\beta\phi^2} \tag{7-13}$$

Bu Thomson modeli için saçıldırma olaylarının açısal bağımlılığının beklenen sonucudur (sadece α-elektron saçılımı α-parçacığının sapmasına sebep olur). Ancak, gözlemlenen açısal dağılım büyük saçılma açılarında daha uzun bir uzantıya (kuyruk) sahiptir (bkz. önceki şekil).



Şekil X: Ağır bir α-parçacığının saçıldırdığı elektron sadece küçük bir sapma açısı ϕ_e'ye yol açarken, çoğu saçıldırma olaylarında α-parçacığının saçıldırma açısı dağılımı Gauss tipindedir.

Saçıldırma sorunları ve tesir kesiti

Şekil XI: Bir potansiyelin saçılımı

Problem, **dışa çıkış açıları** θ, ϕ'nın **çarpışma parametresi** b ve **gelme açısı** ϕ_i'nin fonksiyonu gibi hesaplanabilirse çözülmüş olur

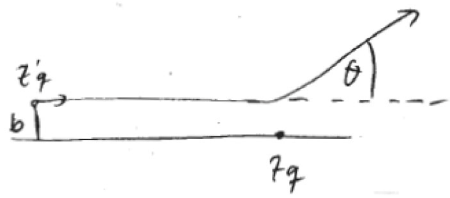
- $\theta = \theta(b, \phi_i)$
- $\phi = \phi(b, \phi_i)$

Küresel simetrik potansiyeller için, $V = V(r)$, saçılma ϕ'den bağımsızdır: $\phi = \phi_i$ ve problem şayet $\boxed{\theta = \theta(b)}$ bilinirse çözülmüş olur. Yani, saçılma açısı θ'yı, b çarpışma parametresinin bir fonksiyonu olarak hesaplayabilirsek.

Z'q yüklü bir parçacıktan Coulomb saçılması, saçıldırma merkezinden dışa doğru *Zq* yükünden ileri gelir ve bu durumda (bkz. Goldstein "Klasik mekanik")

$$\cot\frac{\theta}{2} = \frac{8\pi\epsilon_0}{ZZ'q^2}bE \tag{7-14}$$

olur ki *E* parçacığın kinetik enerjisidir.

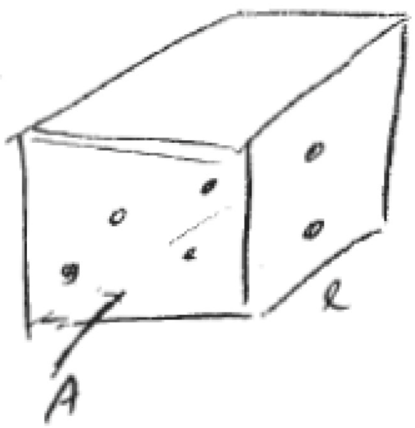


Şekil XII: Coulomb saçılımı

Ancak, çarpışma parametresi *b* tipik bir saçılma deneyinde gözlemlenemediğinden dolayı, tüm çarpışma parametrelerinin ortalamasını almak üzere bir yönteme ihtiyaç duyarız. Bu durumda σ_{tot} **toplam tesir kesiti**ni tanımlıyoruz, bu toplam saçılma hızı R_1'in gelen şiddete oranı olarak bilinir (yanlız tek saçıldırma merkezi):

$$\sigma_{\text{tot}} = \frac{R_1\ [\text{parçacıklar/s}]}{I\ [\text{parçacıklar}/(\text{m}^2\cdot\text{s})]} \Longrightarrow [\text{m}^2] \tag{7-15}$$

n yoğunluğunda, $A \cdot l$ hacmindeki atomların sayısı $N = nAl$ dir.



Şekil XIII: Bir hacim içindeki saçıldırıcılar

Bu takdirde, zayıf-saçıldırma limitinde $N\sigma_{tot} << A$, toplam saçıldırma hızı gelme hızı R_{in} ile orantılıdır.

$$R_N = N\sigma_{\text{tot}}I = n\sigma_{\text{tot}}lIA = n\sigma_{\text{tot}}lR_{\text{in}} \tag{7-16}$$

ve saçılan parçacıkların kesri

$$\frac{R_N}{R_{\text{in}}} = n\sigma_{\text{tot}}l = \frac{N\sigma_{\text{tot}}}{A} \tag{7-17}$$

Işın demetinden çıkarılan parçacıkların kesri, basit olarak toplam tesir kesitinin ışın demeti alanına oranıdır.

Saçılmanın açısal bağımlılığını betimlemek için, tesir kesiti kavramını biraz genelleştirelim. **Diferansiyel tesir kesiti** $\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta,\phi)$ ni, birim katı açı $\frac{dR}{d\Omega}$ başına saçıldırma hızının gelen ışın şiddetine oranı olarak tanımlayabiliriz (yine tek bir saçıldırma merkezi için).

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{dR_i/d\Omega\ [\text{parçacıklar}/(\text{s}\cdot\text{sterad})]}{I\ [\text{parçacıklar}/(\text{m}^2\cdot\text{s})]} \implies \left[\frac{\text{m}^2}{\text{sterad}}\right] \tag{7-18}$$

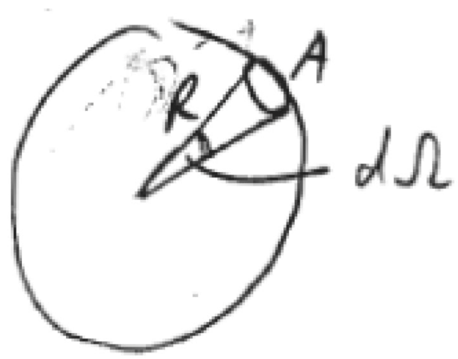
Küresel simetrik potansiyeller için, diferansiyel tesir kesiti sadece θ açısına bağlıdır. Saçıldırıcıdan R kadar uzaklıktaki A alanlı bir detektör bir açıyı asar:

$$\frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{A}{4\pi R^2} \tag{7-19}$$

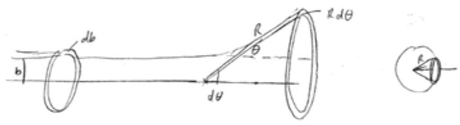
veya

$$d\Omega = \frac{A}{R^2} \tag{7-20}$$

Çarpışma parametreleri b ve $b+db$ olmak üzere θ ve $\theta+d\theta$ açısı arasında, ki bu $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ gibi bir katı açıya karşı gelir, saçılan parçacıklar vardır.



Şekil XIV: Bir $d\Omega$ katı açısı ve detektör alanı A'da saçılma



Şekil XV: Diferansiyel saçılma tesir kesiti

Böylece tesir kesit alanı $d\sigma = 2\pi b db$, bir $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ katı açısına karşı gelir ve diferansiyel kesit alanı şu şekilde yazılabilir:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi b db}{2\pi \sin\theta d\theta} \tag{7-21}$$

Çarpışma parametresi b'ye bağımlılığı yok etmek için (deneyde doğrudan gözlemlenemeyen bir nicelik), 7-14 Eş.'den faydalanarak ve türev alarak:

$$\frac{8\pi\epsilon_0 E}{ZZ'q^2} db = d\left(\frac{\cos\theta/2}{\sin\theta/2}\right) \tag{7-22}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}\sin^2\theta/2 - \frac{1}{2}\cos^2\theta/2}{\sin^2\theta/2} d\theta \tag{7-23}$$

$$= -\frac{d\theta}{2\sin^2\theta/2} \tag{7-24}$$

$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ için ifadeye b ve db nin konulmasıyla

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{ZZ'q^2}{8\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \cot\frac{\theta}{2} \frac{-1}{2\sin^2\theta/2} \frac{1}{\sin\theta d\theta} \tag{7-25}$$

$$= \left(\frac{ZZ'q^2}{8\pi\epsilon_0 E}\right)^2 \frac{1}{4\sin^4\theta/2} \tag{7-26}$$

elde edilir.
Zq'den $Z'q$ ye saçındırma diferansiyel kesit alanı

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z'^2 Z^2 q^4}{256\pi^2\epsilon_0^2 E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}} \tag{7-27}$$

Z' =2 yazarak He-4 parçacığı yani α-parçacıkları için Rutherford saçılma formülü

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = \frac{Z^2 q^4}{64\pi^2\epsilon_0^2 E^2} \frac{1}{\sin^4\frac{\theta}{2}}} \tag{7-28}$$

elde edilir.

Sabit θ'lı detektöre doğru saçıldırma hızını bulmak için, detektörün işgal ettiği $\Delta\Omega$ katı açısını hesaplayıp

$$R_N(\theta) = N\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta)\Delta\Omega I \tag{7-29}$$

denk. kullanarak

- N: saçıldırıcıların sayısı
- $\Delta\Omega$: detektör katı açısı
- I: gelen ışın şiddeti

Rutherford saçıldırma formülü büyük saçıldırma açıları için kuvvetli bastırma ortaya koyabilir. Buna rağmen yinede hafif elektronların dışa saçıldırılmasını açıklayan Thomson modelinden daha büyük geniş-açılar öngörebilir. Daha büyük E gelen enerjisi için daha az sapma ve daha az saçınma sözkonusudur.

Not. Toplam tesir kesit alanı $\sigma_{tot} = \int d\Omega \frac{d\sigma}{d\Omega}$, Coulomb saçılımı için ıraksar zira potansiyelin sonsuz aralığı vardır öyleki çok geniş çarpışma parametresi için bile biraz sapma ortaya çıkabilir. Tesir kesiti kavramı saçınmanın kuantum kuramında çok kullanışlı olmaktadır. Çok büyük saçıldırma açılarında (ve buna karşı gelen küçük çarpışma parametresinde) deneysel bulgular Rutherford formülünden sapma gösterirler. α-parçacığı çekirdek (R fm) bölgesine girer girmez, Coulomb potansiyeli çekirdekler arası kuvvetlerden dolayı değişikliğe uğrar. Bu sapmayı büyük saçıldırma açısında ölçersek sonuçta çekirdeğin yarıçapı elde edilir

$$R = 1.2 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{m} \cdot \sqrt{A} \Longrightarrow n_{\text{çekirdek}} = 2 \cdot 10^{17}\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \tag{7-30}$$

ki burada A nükleonların (protonlar ve nötronlar) sayısıdır. Çekirdeğin yoğunluğu sbt. olup, son derece büyüktür. (Çeliğin yoğunluğu 8×10^3 kg/m^3 dür.)