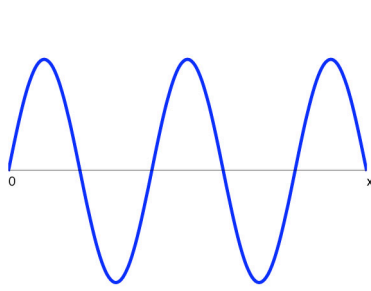
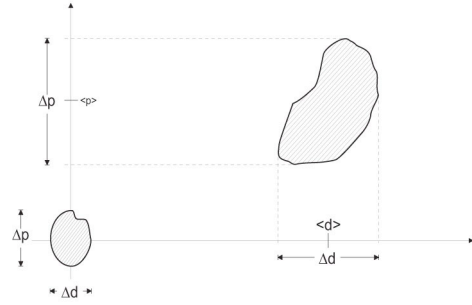


Önceden Tartıştığımız Konular

- Faz uzayında ölçüm cihazının çözünürlüğü ile belirlenen **CM** ve **KM** arasındaki sınır
- **CM** ve **KM** arasındaki geçiş
- Durağan zamanlı Fermat ilkesi
- Işık, yakın komşu yollar arasında zamanda birinci mertebe değişiklik olmayan bir yolu takip eder.



Şekil I: Hareketli elektrik alan düzlem dalgası



Şekil II: Faz Uzayı

$$\Delta p \Delta x \gg h \quad \Leftrightarrow \quad CM$$

$$\Delta p \Delta x \sim h \quad \Leftrightarrow \quad KM$$

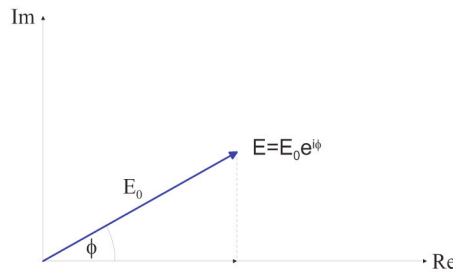
$$\Delta p \Delta x \ll h \quad \Leftrightarrow \quad KM \text{ ile yasaklanmış}$$

Fermat İlkesi Nasıl İşlemektedir?

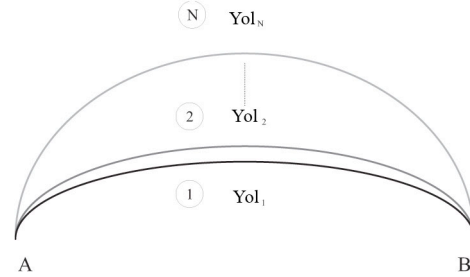
- Uzayda herhangi bir noktada, toplam elektrik alanı tüm elektrik alan katkılarının toplamıdır.
- λ dalgaboylu (dalga vektörü $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) EM alan bir x yolu katederse, fazı $\phi = kx$ kadar değişir.
- Kompleks Yazılım: $\vec{E}(x) = \vec{E}(0)e^{ikx}$ (Elektrik alanı eşitsizliğin **gerçek** kısmıdır).

Fazör Temsili

1. Işığın şiddetini ve fazını, kompleks düzlemdeki elektrik alanı gösterelim.
2. Işık x boyunca hareket ederken, vektör kompleks düzlemde $\Delta\phi = k\Delta x$ kadar döner.



Şekil III: Elektrik-alan vektörünün fazör betimlenmesi. Fazör kompleks düzlemde döner; elektrik alanı gerçel eksene izdüşümdür.

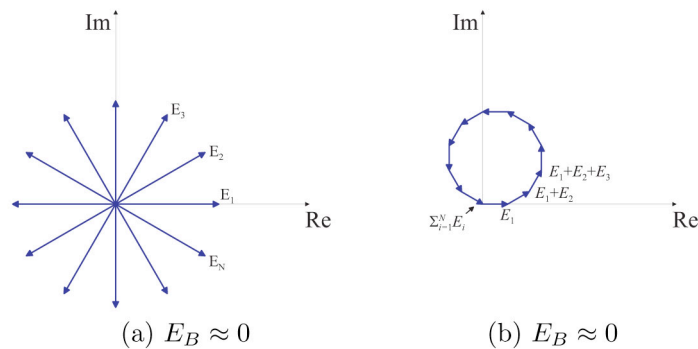


Şekil IV: Farklı yol uzunlukları ile mümkün ışık yolları

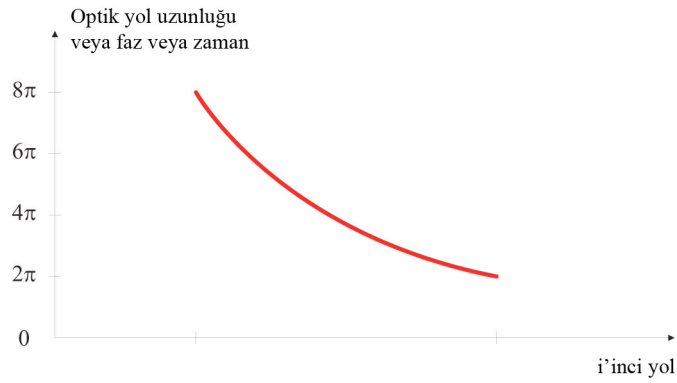
$$E_A = E_0 \quad (3-1)$$

$$\begin{aligned} E_B &= E_0 e^{ikl_1} + E_0 e^{ikl_2} + \dots + E_0 e^{ikl_N} \\ &= E_1 + E_2 + \dots + E_N \end{aligned} \quad (3-2)$$

Bir yoldan diğerine değişme halinde faz hızlı bir değişme gösterirse, B noktasında aşağıdaki durum oluşur:

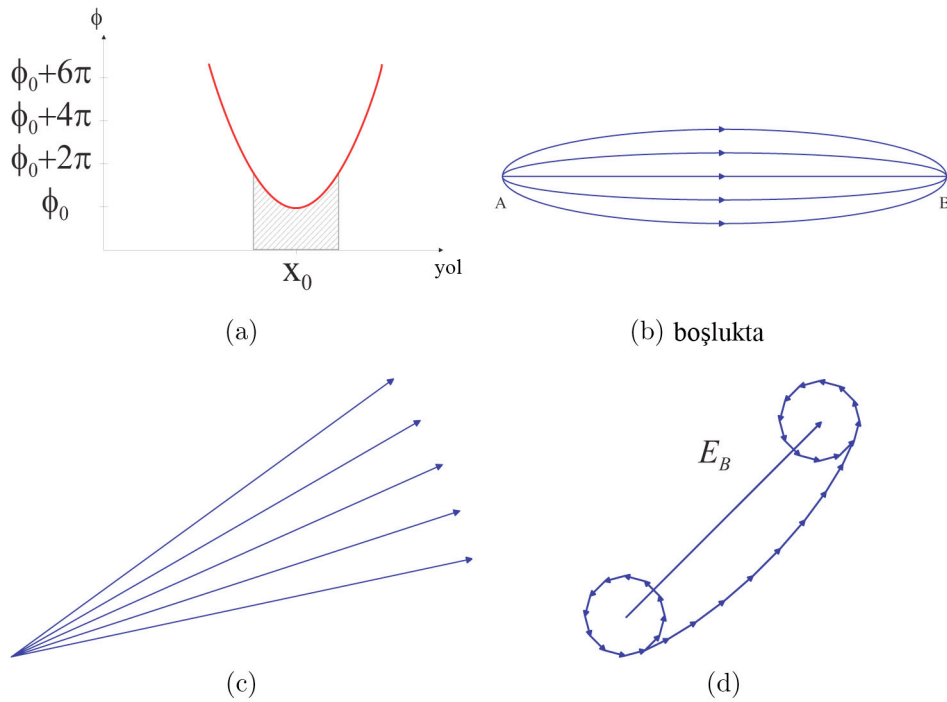


Şekil V: Mümkün tüm yollara karşı gelen fazörlerin toplamı, gözlem noktası B de toplam elektrik alanını verir.



Şekil VI: Fazın monotonik olarak sıfıra doğru gitmesinin meydana geldiği yollardan B noktasında elektrik alanı E_B ye olan katkı.

Fazörlerin toplamının sıfıra yakın olması durumunda yolların kapatılması B noktasındaki elektrik alanına hiçbir etkiye bulunamaz. Bkz. Şek. VI. x_0 'a yakın yollarla ilgili fazörler hemen hemen sabit fazlıdır, yani, kompleks düzlemde yaklaşık aynı yöndeki noktadadır. Bkz. Şek. VII.



Şekil VII: Yol uzunluğunun bir ekstremuma sahip olmasıyla B noktasındaki elektrik alanına en büyük katkıyı sağlama halinde, x_0 civarındaki fazörler.

B noktasındaki toplam alan E_B 'ye en büyük katkı, fazın durağan olduğu yollardan ileri gelmektedir. Yakındaki komşu yollar yıkıcı girişim yaptıklarından hedefteki alana katkıda bulunamazlar. Böylece, B deki toplam alanı makul şekilde değiştirmeden kapatırlar. Klasik bir yol durağan bir faz bölgesi olarak betimlenmiştir. Işık tüm uzayı “keşfeder” ancak sadece klasik yol civarındaki küçük bir bölge hedefteki toplam alana katkıda bulunur.

Aynı betimleme KM’de geçerlidir

Bir parçacık tüm uzayı keşfeden kompleks bir dalga fonksiyonu $\psi(\mathbf{r})$ ile betimlenmesine karşın, durağan fazlı küçük bir bölge hedefteki toplam alana katkıda bulunur. Klasik yol uzayın öyle bir bölgesidir ki civardaki yollar yapıcı şekilde girişimde bulunurlar ve hedefte zahiri olarak dalga fonksiyonun tüm genliğini oluştururlar. Uzayın diğer bölgeleri hedefteki dalga fonksiyonunu esastan değiştirmeden kapatabilirler.

Parçacıkların fazı $\phi = kx$ 'i hesaplamakta kullanılan dalga boyu λ (veya dalga vektörü $k = \frac{2\pi}{\lambda}$) ne demektir? E enerjili bir **EM** dalga, $\mathbf{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{e}$ dalga vektörü yönünde $p = \frac{E}{c}$ momentumunu birlikte taşır. ν frekanslı bir fotonun enerjisi $E = h\nu$ olup, taşıdığı momentum

$$\begin{aligned} p &= \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda} \\ &= \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \\ &= \hbar \mathbf{k}. \end{aligned} \quad (3-3)$$

$E = h\nu = \hbar\omega \Rightarrow \text{bir fotonun enerjisi}$ $\mathbf{p} = \frac{h}{\lambda} \hat{e} = \hbar \mathbf{k} \Rightarrow \text{bir fotonun momentumu}$
--

Işık için $d \sim \lambda$ mesafesinde artık klasik bir yol mevcut değildir, veyahut $d \cdot p = d \cdot \frac{h}{\lambda} \sim \lambda \cdot \frac{h}{\lambda} = h$ veya

$$d \cdot p \sim h \quad (3-4)$$

Bu klasik mekanik ile kuantum olaylarını belirleyen sınır için geçerli olan aynı kriterdir. Klasik yol (geometrik optik)

$$d \cdot p \gg h \Rightarrow \text{geometrik optik} \quad (3-5)$$

limitinde tekrar kazanılır.

$d \cdot p \sim h$ için dalga optiğinde hiçbir geometrik yol bulunamaz. Bunu **CM**'den **KM**'ye geçiş kriterleriyle aynı olduğunu ancak foton gibi parçacıklar belirleyebilirsek kavrayabiliyoruz. λ_{dB} , p momentumuna sahip olan deBroglie dalga boyudur.

$$\boxed{\lambda_{dB} = \frac{h}{p}} \Leftrightarrow \boxed{p = \frac{h}{\lambda_{dB}}}$$

$d \gg \lambda_{\text{foton}}$ $d \gg \lambda_{\text{dB}}$	geometrik optik klasik mekanik	$d \gg \lambda \Leftrightarrow d \cdot p \gg h$
$d \sim \lambda_{\text{foton}}$ $d \sim \lambda_{\text{dB}}$	dalga optiği KM (dalga mekaniği)	$d \gg \lambda \Leftrightarrow d \cdot p \gg h$

Tablo III.1: $d \rightarrow$ (optiksel) gerecin çözünürlüğü yani, yarık aralığı

$d \gg \lambda_{\text{dB}}$ veya eşdeğer olarak $d \cdot p \gg h$ için klasik bir yol tanımlanabilir ve ilgili nesne aynen hareketli klasik bir parçacık gibi davranır.

Geometrik optik yol, Fermat en kısa süreli zaman ilkesinden türetilebilir. Bu ilke durağan ışık fazına ait olup, yakındaki yolların yapıcı girişiminden doğan dalga optiğinin daha genel bir çerçevesinde ortaya çıkar. Benzer şekilde, bir parçacığın klasik yolu da civardaki yollar boyunca deBroglie dalgalarının yapıcı girişimiyle ortaya çıkar. Geometrik ışının enine “aralığı” yapıcı girişimden veya eşdeğer olarak kırınım ile betimlenmiştir. Benzer şekilde, bir parçacığın klasik yolunun enine aralığı deBroglie dalgalarının kırınımı ile oluşturulur. Klasik yolun enine aralığı, parçacığın büyüklüğü ile **aynı** değildir. $d \sim \lambda$ olacak şekilde sıkıştırmalar durumunda hiçbir klasik yol tanımlanamaz. Dalga optiği (dalga mekaniği), **CM**’deki geometrik optikten daha geneldir. A dan B ye hareketli parçacık için hiçbir klasik yolun tanımlanamayacağı bazı durumlar mevcuttur, örneğin, çift yarık, kırınım ağı ve Fresnel mercekleri. (Klasik bir yol)a ait durağan faz kavramı her zaman uygulanamazken, bir parçacığın uzayın belli bir bölgesinde bulunabilme olasılığını tayin etmek için daha genel olan yapıcı ve yıkıcı girişim kavramı daima geçerlidir.

KM’de parçacık hareketini betimlemek için şunlara ihtiyaç vardır:

1. Bir dalga fonksiyonu $\Psi(\mathbf{r}, t)$ ’nin kavramları

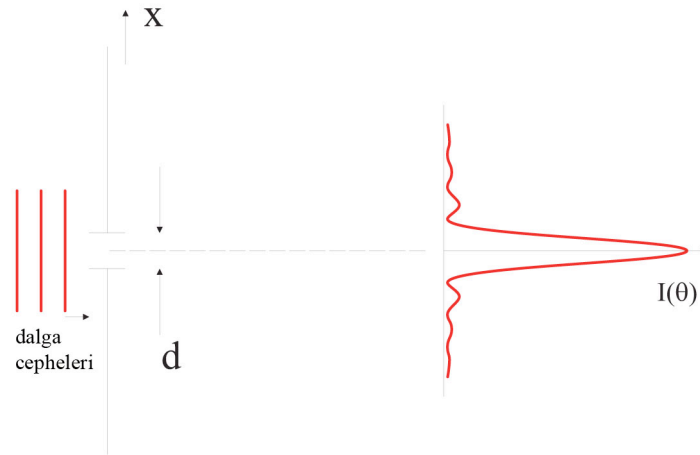
- girişim: $\Psi(\mathbf{r}, t) = \Psi_1(\mathbf{r}, t) + \Psi_2(\mathbf{r}, t)$
- $\mathbf{r}$ civarında küçük bir d^3r hacmi içinde parçacığın bulunma olasılığı:
 $|\Psi(\mathbf{r}, t)|^2 d^3r$

2. $\Psi(\mathbf{r}, t)$ dalga fonksiyonunun uzayda ve zamana karşı ne şekilde evrimini belirleyen bir denklem, Schrödinger denklemi.

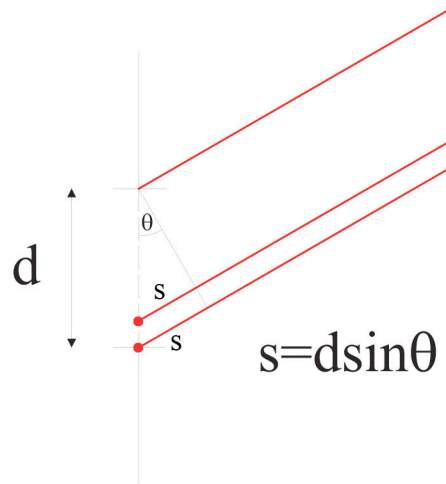
CM, dalga mekaniğinin geometrik optik limiti olarak ortaya çıkar.

Kırınım ve Heisenberg belirsizlik ilkesi

$\phi_0 \ll 2\pi$, $\phi_0 = \frac{s}{\lambda} \cdot 2\pi = \frac{2\pi d}{\lambda} \sin \theta = kd \sin \theta$ için yapıcı girişim olur. $\phi_0 = 2\pi$ için birinci minimumun yerleşiminde açisal dağılganlığı tahmin edelim.

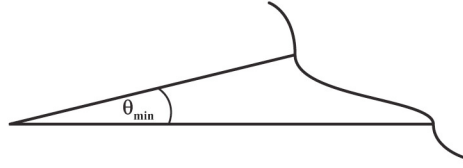


Şekil VIII: Bir yarıktan geçirmek suretiyle dalgayı $\Delta x = d$ içine yerleştirmeye gayret etmek. Uzak-alan kırınım deseni: $I = I_0 \left(\frac{\sin(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta)}{\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta} \right)^2$.



Şekil IX: Yarık boyunca farklı noktalardan çıkan dalgalar için fazör açısındaki değişimden dolayı yol uzunluğu farkı ortaya çıkar $\Rightarrow$ kırınım deseni.

$$\sin \theta_{\min} = \frac{\lambda}{d}$$



$\theta_{\min}$ birinci minimum için yarım açıdır. $d \gg \lambda$ için, $\theta_{\min}$ açısal yayılması küçük olup, bu durumda klasik bir yol tanımlanabilir. λ dalga boyuna ve $p = \frac{h}{\lambda}$ momentumuna sahip bir dalga (e.m dalga veya parçacık) için x -yönü belirsizliği:

$$\Delta p_x \gtrsim p \sin \theta_{\min} = \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{d} \quad (3-6)$$

Yarık filtrelemesinden dolayı konumdaki belirsizlik $\Delta x = d$ olur. Böylece, $\Delta p \Delta x \geq h$ olur. Belirsizliklerin daha doğru bir tanımı ise,

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} : \text{Heisenberg belirsizlik bağıntısı} \quad (3-7)$$

$$\Delta x : x\text{-yönündeki nesnenin konumundaki belirsizlik} \quad (3-8)$$

$$\Delta p : x\text{-momentumundaki belirsizlik} \quad (3-9)$$

Dalga mekaniği ve ışık arasındaki benzerlik tartışmamızdan, Heisenberg belirsizlik ilkesi $p = \hbar k = \frac{h}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{h}{\lambda}$ bağıntısı parçacıklar için geçerli ise, p momentumlu bir deBroglie dalgaboylu bir parçacık içinde doğrudur,

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}. \quad (3-10)$$

$d \gg \lambda_{dB}$ kısıtlamaları için klasik bir yol belirlenir. Makroskopik nesneler için:

$$m = 10^{-3} \text{ kg} \quad (3-11)$$

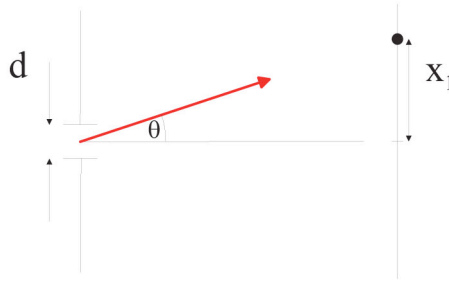
$$v = 1 \frac{\text{mm}}{\text{s}} \quad (3-12)$$

$$p = 10^{-6} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \quad (3-13)$$

$$\lambda_{dB} = \frac{6 \times 10^{-34}}{10^{-6}} \frac{\text{J} \cdot \text{s}}{\text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}} \rightarrow \text{oldukça küçüktür.} \quad (3-14)$$

Heisenberg Belirsizlik İlkesi

Bir parçacığı uzayda yerleştirme teşebbüsü gerçeği, onun momentumunda bir yayılmaya yol açar ve bu durum **dalga özelliğinden** yani **kırınım**dan ileri gelmektedir. Parçacığı d' 'ye yerleştirme $\theta \neq 0$ açılarda yıkıcı girişime yol açacak yolları ortadan kaldırmak demektir. Deneyin bir defa gerçekleştirilmesinden sonra: bir parçacığı x_1 de gözlemliyoruz.



Şekil X: Tek yarıklı bir kırınımında elektron veya fotonun konumunun gözlemlenmesi

$\sin\theta \approx \tan\theta \approx \frac{x_1}{L}$ yaklaşımı halinde, parçacığın momentumu $p_x = p \sin\theta$ olmalıydı. x deki belirsizlik d ve L yeterince keyfi büyüklükte olabileceğinden, bu durumda, Heisenberg belirsizlik ilkesini ihlal etmiş oluruz, $\Delta p_x \Delta x = p \frac{d}{L} L$. Bu doğrudur, Heisenberg belirsizliği ihlal edilmemiş olup, bunun yerine ölçümün sonucu **öngörülmüştür** ve deney sonrasında tahmin edilmemiştir. Deneyin ilk kez yapılmasındaki ölçümümüz (ilk parçacık), yarıktan geçen ardışık parçacığın x -yönü momentumunu herhangi bir şekilde öngörmenize yardımcı olamaz.

Heisenberg Belirsizlik Bağlantısı ve Fourier Açılımı

Kutunun duvarlarında yok olan, $f(x=0) = f(x=L) = 0$, ve kutu içindeki gerçel bir dalga için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin k_n x \quad (3-15)$$

yazabiliriz ki burada $k_n = \frac{\pi}{L} n$ sınır şartlarını sağlar ve c_n uygun olarak seçilmiştir. Uygunluk bakımından ekseriya periyodik sınır şartları $\psi(x=0) = \psi(x=L)$ seçeriz ve karmaşık dalga fonksiyonu $\psi(x)$ 'i şu şekilde yazabiliriz:

$$\psi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{ik_n x} \quad (3-16)$$

ki burada $k_n = \frac{2\pi}{L} n$, $\psi(0) = \psi(L)$ sınır şartını sağlar ve açınım katsayıları c_n 'ler teker teker belirlenebilir, ancak bu durumda bunlar karmaşık sayılardır.

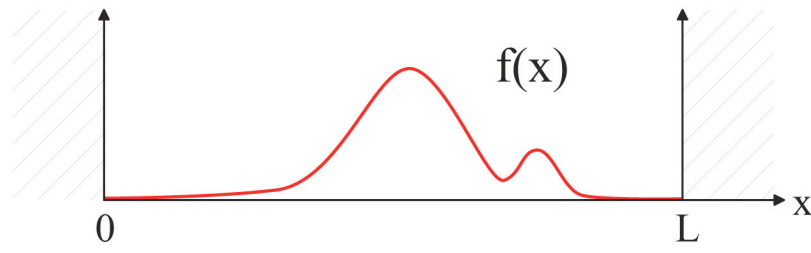
Dalga optiği görüş açısından, bu açınım düzlem dalga cinsinden bir açınım

$$f(x) = e^{ik_n x} \quad (3-17)$$

olup, bunlar belirlenmiş dalga vektörü k_n ve belli momentuma, $p_n = \hbar k_n$, sahip olurlar ve böylelikle

$$f(n) = e^{ip_n x / \hbar} \quad (3-18)$$

yazabiliriz.



Şekil XI: L uzunluğundaki bir kutu içindeki $f(x)$ gerçel fonksiyonu bir Fourier serisine açılabilir.

burada

$$p_n = n\hbar \frac{2\pi}{L} = n\hbar k_1 = np_1 \quad (3-19)$$

$$p_1 = \frac{\hbar 2\pi}{L} \quad (3-20)$$

Peryodik sınır şartları sadece kesikli momentum $p_n = \pm n\hbar \frac{2\pi}{L}$ 'lu durumlara izin verir. Fourier bileşenlerinden sentezlenmiş olan uzaydaki bir dalga paketi, bu paket içinde yapıcı bir şekilde girişimde bulunurken diğer yerlerde ise yıkıcı olarak girişim yapar. Kutunun boyunu $L \rightarrow \infty$ yaparsak, Fourier serisi bir Fourier integraline dönüşür:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \quad (3-21)$$

burada

$$c_n = c(k_n) \rightarrow \tilde{\phi}(k) \quad (3-22)$$

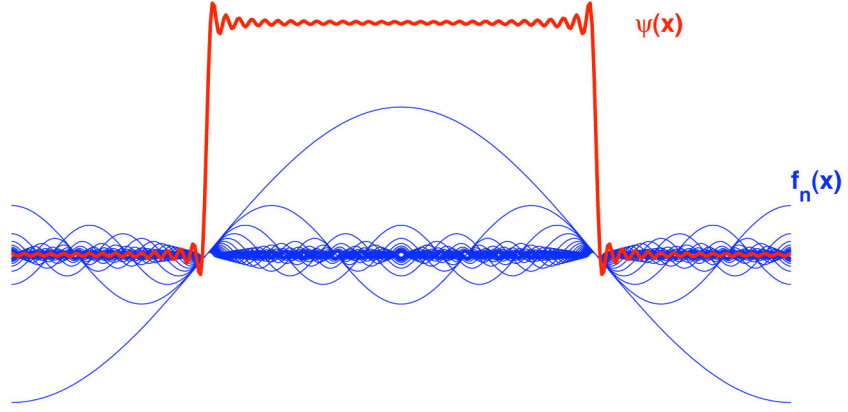
$$\sum_n = \sum_{k_n} \rightarrow \int dk \quad (3-23)$$

ve daha sonra ortaya çıkacak olan bazı ifadelerin daha simetrik gözükmesi için $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ normalizasyon çarpanı tanıtılmıştır. Sınır şartları $\pm\infty$ 'a taşındığından dolayı, düzlem dalganın dalga vektörü k ve momentumu $p = \hbar k$, şimdi sürekli değişkenler olup, artık kesikli değerlere kısıtlanamazlar. $p = \hbar k$ momentumu cinsinden aynı zamanda şunları yazabiliriz:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk \tilde{\phi}(k) e^{ikx} \quad (3-24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp \phi(p) e^{ipx/\hbar} \quad (3-25)$$

ki burada $\phi(p) = \frac{1}{\hbar} \tilde{\phi}(k)$ dir.



Şekil XII: Fourier ayrışımın şekli. Farklı dalga boylu ve uygun fazlı dalgalar $\psi(x)$ in büyük olduğu bölgede yapıcı girişim meydana getirirken, yok oldukları bölgede ise yıkıcı bir girişim ortaya çıkarırlar.