

1)

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{başka yerde} \end{cases}$$

$$\Psi(x, t=0) = \begin{cases} \sqrt{4/a} & 0 \leq x \leq a/4 \\ 0 & \text{başka yerde} \end{cases}$$

$$a) \quad \Psi(x, 0) = \sum_n c_n u_n(x) \quad , \quad u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right)$$

(bağıntı sayfasında verilmiştir.)

$$\begin{aligned} c_n &= \int dx \, u_n^*(x) \Psi(x, 0) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sqrt{\frac{4}{a}} \int_0^{a/4} dx \sin\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{a} \frac{a}{n\pi} \left[-\cos\left(n\pi \frac{x}{a}\right) \right]_0^{a/4} = \frac{2\sqrt{2}}{n\pi} \left(1 - \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{n\pi} \sin^2\left(\frac{n\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

$$b) \quad \Psi(x, t) = \sum_n c_n u_n(x) e^{-iE_n t/\hbar} \quad , \quad E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ma^2} n^2$$

c) Enerjilerin ölçümü olasılıkları $|c_n|^2$ olan E_n değerlerini ortaya çıkarır ki, burada c_n a) şıkkındaki ifade ile verilmiştir.
 $n=8m$, m bir tamsayı, için $c_n=0$.

$\Rightarrow$ karşı gelen enerji özdeğerleri asla gözlemlenmeyecektir.

d) $\langle p \rangle$ zamanla değişmeli, zira duvarlardan yansıma olur.

$$\begin{aligned} e) \quad \langle \frac{1}{E} \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \frac{1}{E_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{32}{n^2 \pi^2} \sin^4\left(\frac{n\pi}{8}\right) \frac{2ma^2}{\hbar^2 \pi^2 n^2} \\ &= \frac{64ma^2}{\hbar^2 \pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin^4\left(\frac{n\pi}{8}\right) = \frac{2ma^2}{\hbar^2 \pi^2} \times 0.167 \end{aligned}$$

2) a) Bağlı bir durum $E < 0$ olmasını gerektirir; aksi takdirde $x < 0$ için bir düzlem dalgamız vardır ve dalga fonksiyonu $-\infty$ 'a uzanır.

$$\psi(x < 0) = A e^{+k_- x} + B e^{-k_- x} = A e^{k_- x}$$

(yani, $B=0$ olmalıdır; aksi takdirde $x \rightarrow -\infty$ için ψ üssel olarak büyür)

ve

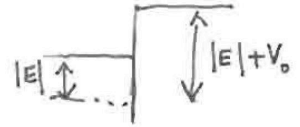
$$\psi(x > 0) = C e^{-k_+ x},$$

burada

$$\frac{\hbar^2 k_-^2}{2m} = |E| = -E$$

ve

$$\frac{\hbar^2 k_+^2}{2m} = |E| + V_0 = V_0 - E$$



olur.

$$b) \delta(cy) = \frac{1}{|c|} \delta(y) \Rightarrow \delta(x) \text{ 'in birimleri } \frac{1}{m} \text{ dir.}$$

H ve V 'nin birimleri, J dir.

$\therefore \lambda$ 'nın birimleri J.m dir. (Enerji $\times$ uzunluk)

c) ψ , $x = 0$ 'da süreklidir (aksi takdirde, ψ , δ fonksiyonudur)

$$\psi' \text{ sonlu adıma sahiptir: } \psi'(+\epsilon) - \psi'(-\epsilon) = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda \psi(0) \dots\dots\dots (*)$$

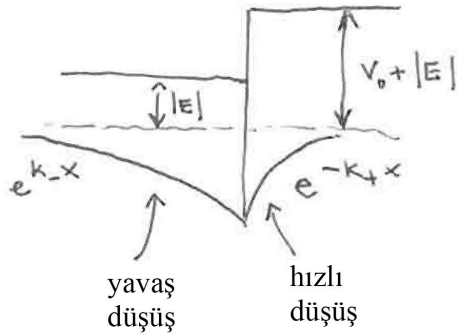
(siz bunu elde edebilirsiniz, ancak o, bağıntı sayfasında verilmiştir.)

ψ süreklidir $\Rightarrow A=C$

$$(*) \Rightarrow -k_+ A - k_- A = -\frac{2m}{\hbar^2} \lambda A$$

$$\text{i.e. } k_+ + k_- = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda$$

d)



ψ sürekli

$$\Rightarrow \langle x \rangle < 0$$

e)

c) 'den $k_+ + k_- = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda$

a) 'den $k_+^2 = \frac{2m}{\hbar^2} (|E| + V_0)$

$$k_-^2 = \frac{2m}{\hbar^2} |E|$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m(V_0 + |E|)} + \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m|E|} = \frac{2m}{\hbar^2} \lambda$$

$$\sqrt{V_0 + |E|} + \sqrt{|E|} = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar} \lambda$$

$$k_+^2 + 2k_+k_- + k_-^2 = \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2$$

$$4k_+^2k_-^2 = \left[\left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\right)^2 - k_+^2 - k_-^2\right]^2$$

$$4\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 (|E| + V_0)|E| = \left[\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^2 \lambda^2 - \frac{2m}{\hbar^2} (|E| + V_0) - \frac{2m}{\hbar^2} |E|\right]^2$$

$$4(|E| + V_0)|E| = \left[\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} - (V_0 + 2|E|)\right]^2$$

$$4|E|^2 + 4|E|V_0 = \left(\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2}\right)^2 - 2\frac{2m\lambda}{\hbar^2}(V_0 + 2|E|) + V_0^2 + 4V_0|E| + 4|E|^2$$

$$2\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2}(V_0 + 2|E|) = \left(\frac{2m\lambda^2}{\hbar^2}\right)^2 + V_0^2$$

$$2(V_0 + 2|E|) = \frac{2m\lambda^2}{\hbar^2} + \frac{\hbar^2}{2m\lambda^2} V_0^2$$

$$\begin{aligned} |E| &= \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} + \frac{\hbar^2 V_0^2}{8m\lambda^2} - \frac{1}{2} V_0 \\ &= \frac{1}{2m} \left(\frac{m\lambda}{\hbar} - \frac{V_0 \hbar}{2\lambda} \right)^2 \end{aligned}$$

$$E = -|E|$$

3) a) $\hat{A} = a\hat{x} + ib\hat{p}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$$\hat{A}^\dagger = a\hat{x}^\dagger - ib\hat{p}^\dagger \quad \text{dir.}$$

zira $(\hat{B} + \hat{C})^\dagger = \hat{B}^\dagger + \hat{C}^\dagger$ ve $(i\hat{B})^\dagger = -i\hat{B}^\dagger$.

böylece $\hat{A}^\dagger = a\hat{x} - ib\hat{p}$ ($\hat{x} = \hat{x}^\dagger$, $\hat{p} = \hat{p}^\dagger$)

$$\begin{aligned} & \left(\text{veya } \int dx ((a\hat{x} - ib\hat{p})^\dagger \psi_1)^* \psi_2 \right. \\ & = \int dx a^* (\hat{x}^\dagger \psi_1)^* \psi_2 - \int dx (-ib^*) (\hat{p}^\dagger \psi_1)^* \psi_2 \\ & = \int dx \psi_1^* a\hat{x} \psi_2 + \int dx \psi_1^* (+ib)\hat{p} \psi_2 \\ & = \int dx \psi_1^* (a\hat{x} + ib\hat{p}) \psi_2 \\ & \Rightarrow (a\hat{x} + ib\hat{p})^\dagger = a\hat{x} - ib\hat{p} \left. \right) \end{aligned}$$

b) $[\hat{A}, \hat{A}] = \hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} = 0$

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{x}] &= a[\hat{x}, \hat{x}] + ib[\hat{p}, \hat{x}] \\ &= 0 + ib \frac{\hbar}{i} = \hbar b. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\hat{A}, \hat{p}] &= a[\hat{x}, \hat{p}] + ib[\hat{p}, \hat{p}] \\ &= a i\hbar + 0 = i\hbar a \end{aligned}$$

$$4) \quad \phi_1(p) = \phi(p) \exp(ipx_1/\hbar) \quad , \quad x_1 \text{ gerçel}$$

$$\begin{aligned} a) \quad \langle p \rangle_{\phi_1} &= \int dp \phi_1^*(p) p \phi_1(p) \\ &= \int dp \phi^*(p) e^{-ipx_1/\hbar} p \phi(p) e^{ipx_1/\hbar} = \langle p \rangle_{\phi} = p_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad \langle x \rangle_{\phi_1} &= \int dp \phi_1^*(p) \hat{x} \phi_1(p) \\ &= \int dp \phi_1^*(p) i\hbar \frac{\partial}{\partial p} (\phi(p) e^{ipx_1/\hbar}) \\ &= \int dp \phi^*(p) e^{-ipx_1/\hbar} i\hbar \left(e^{ipx_1/\hbar} \frac{\partial \phi}{\partial p} + \phi(p) \frac{ix_1}{\hbar} e^{ipx_1/\hbar} \right) \\ &= \int dp \phi^*(p) i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \phi(p) - x_1 \int dp \phi^*(p) \phi(p) \\ &= \langle x \rangle_{\phi_0} - x_1 \\ &= x_0 - x_1 \end{aligned}$$

c) Momentum-uzay dalga fonksiyonuna uygulanmış olan $e^{ipx_1/\hbar}$ çarpanı, momentumu değiştirmeksizin, parçacığı konum uzayında x_1 kadar kaydırır.