MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Kuantum Mekaniği I (8.04) Bahar 2006

Pratik Sınav 2 Çözümleri

1. **Parçalı sürekli sabit potansiyelde Dalga fonksiyonları** (20 puan)

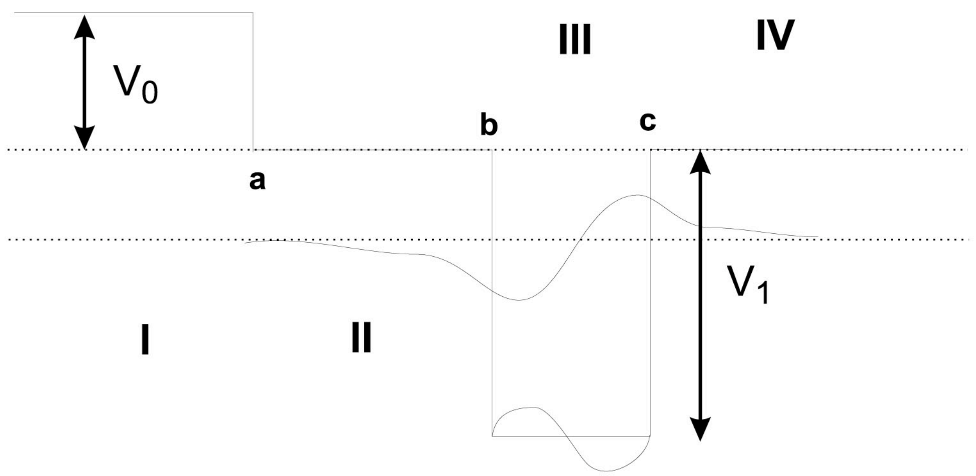
(a) I, II, III ve IV ncü bölgelerdeki dalga fonksiyonları

$$\begin{array}{rcll} \psi_I(x) = & Ge^{\kappa x} & x \le a \text{ ve } \frac{\hbar^2\kappa^2}{2m} = V_0 - E & \text{için} \\ \psi_{II}(x) = & Ee^{-ikx} + Fe^{ikx} & a \le x \le b \text{ ve } \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = E & \text{için} \\ \psi_{III}(x) = & Ce^{-iqx} + De^{iqx} & b \le x \le c \text{ ve } \frac{\hbar^2 q^2}{2m} = E + V_1 & \text{için} \\ \psi_{IV}(x) = & Ae^{-ikx} + Be^{ikx} & x \ge c. & \end{array} \tag{1}$$

(b) $\psi(x)$'ın $x = c$ sürekliliği $Ce^{-iqc} + De^{-iqc} = Ae^{-ikc} + Be^{-ikc}$ verir.
$\psi'(x)$'ın $x = c$ sürekliliği $iq(-Ce^{-iqc} + De^{-iqc}) = ik(-Ae^{-ikc} + Be^{-ikc})$ verir.

(c) $b \le x \le c$ deki potansiyel kuyusunun $E_b < 0$ bağlı enerji durumlarının varlığını kabul edelim

$$\begin{array}{rcll} \psi_I(x) = & Ge^{\kappa' x} & x \le a \text{ ve } \frac{\hbar^2\kappa'^2}{2m} = V_0 - E_b = V_0 + |E_b| & \text{için} \\ \psi_{II}(x) = & Ee^{-\kappa x} + Fe^{\kappa x} & a \le x \le b \text{ ve } \frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = |E_b| = -E_b & \text{için} \\ \psi_{III}(x) = & Ce^{-iqx} + De^{iqx} & b \le x \le c \text{ ve } \frac{\hbar^2 q^2}{2m} = V_1 - |E_b| = V_1 + E_b & \text{için} \\ \psi_{IV}(x) = & Ae^{-\kappa x} & x \ge c. & \end{array} \tag{2}$$



Şekil 1: Derin ve sığ bağlı parçacıkların ilk uyarılmış durumları.

(d) Kuyudaki birinci uyarılmış durum için dalga fonksiyonunu çiziniz.

Derin bağlı parçacık için,

$$V_1 \gg \frac{\hbar^2}{2m(b-c)^2} \tag{3}$$

Zayıf bağlı parçacık için,

$$V_1 \sim \frac{\hbar^2}{2m(b-c)^2}. \tag{4}$$

2. **Sonsuz bir kutu potansiyelde bir dalga fonksiyonunun zaman evrimi**

(a) $\sin 2kx \propto u_2(x)$ ve $\sin 3kx \propto u_3(x)$ olduğundan,

$\psi(x,0) = C\sqrt{\frac{a}{2}}\left(3\sqrt{\frac{2}{a}}\sin 2kx - 2\sqrt{\frac{2}{a}}\sin 3kx\right) = \psi(x,0) = C\sqrt{\frac{a}{2}}\left(3u_2(x) - 2u_3(x)\right)$
yazabiliriz.

Sonuç olarak, $\Sigma|C_n|^2 = 1$ açınım katsayıları için şart olduğundan,

$C^2\frac{a}{2}\left(3^2+2^2\right) = 1 \Longrightarrow C = \sqrt{\frac{2}{13a}}.$ olur.

(b) Yukarıdaki ifade verilirse, $c_2 = 3C\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ve $c_3 = 2C\sqrt{\frac{a}{2}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$ buluruz.

(c) $\Psi(x,t) = \sqrt{\frac{2}{a}}\frac{1}{\sqrt{13}}\left(3\sin 2kx e^{-i\frac{\hbar k^2}{2ma^2}4t} - 2\sin 3kx e^{-i\frac{\hbar k^2}{2ma^2}9t}\right).$

(d) $E_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ ve $E_3 = \frac{q\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ enerjileri $\frac{9}{13}$ ve $\frac{4}{13}$ olasılıklarıyla, *t* zamanında ölçüm sonucunda ortaya çıkarlar.

e) Başlangıç dalga fonksiyonu gerçel olarak seçilebildiğinden dolayı $J(x,t=0)=0$ olur. Akım, kompleks global faza bağlı değildir. (Kompleks fazın hiçbir konumsal değişimi olmadığından akım sıfırdır.) Daha sonraki zamanlarda, sin2*kx* ve sin3*kx* terimleri, farklı kompleks fazları kazanabilirler ve kompleks fazın konumsal değişimi vardır; sonuç olarak, akım sıfır değildir. $J(0,t) = J(a,t) = 0$ olduğundan, parçacık kutu içinde kalır.

3. **Momentum temsilinde kare dalga fonksiyonu** (25 puan)

(a) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} dk|\phi(k)|^2 = |C|^2 2k_0 \Longrightarrow C = \frac{1}{\sqrt{2k_0}}.$

(b) $(\Delta p)^2 = \langle\hbar^2k^2\rangle - \langle\hbar k\rangle^2$

$\langle\hbar k\rangle = 0$ zira $\phi(k)$ simetriktir.

$$\begin{aligned}
\langle\hbar^2k^2\rangle &= \hbar^2\int_{-\infty}^{\infty} dk k^2|\phi(k)|^2 = \hbar^2\int_{-k_0}^{k_0} dk k^2\frac{1}{2k_0} \\
&= \frac{\hbar^2}{2k_0}2\int_0^{k_0} dk k^2 = \frac{\hbar^2k_0^2}{3} \\
\Longrightarrow \Delta p &= \frac{\hbar k_0}{\sqrt{3}}.
\end{aligned} \tag{5}$$

(c)

$$\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dk\phi(k)e^{ikx}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}}\int_{-k_0}^{k_0} dke^{ikx}.$$

(d) Boşluk momentum özfonksiyonları aynı zamanda enerjisi $E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}$ olan enerji özfonksiyonları olduklarından

$$\Longrightarrow \psi(x,t) = \frac{1}{4\pi k_0}\int_{-k_0}^{k_0} dke^{ikx}e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t} \tag{6}$$

yazılır.

(e)

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{4\pi k_0}}\frac{1}{ix}\left(e^{ik_0x}-e^{-ik_0x}\right)$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi k_0}}\frac{1}{x}\sin k_0x$$
$$= \sqrt{\frac{k_0}{\pi}}\frac{\sin k_0x}{k_0x}$$
$$\Longrightarrow |\psi(x,0)|^2 = \frac{k_0}{\pi}\left(\frac{\sin k_0x}{k_0x}\right)^2. \tag{7}$$

4. **İtici bir δ-potansiyeli tarafından saçındırılma** (25 puan)

(a)

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx}+Be^{-ikx} \qquad x<0 \text{ için ve } \frac{\hbar^2k^2}{2m}=E$$
$$\psi_{II}(x) = Ce^{ikx} \qquad x>0 \text{ için} \tag{8}$$

(b) V_0 sabitinin birimi [enerji] · [uzunluk]

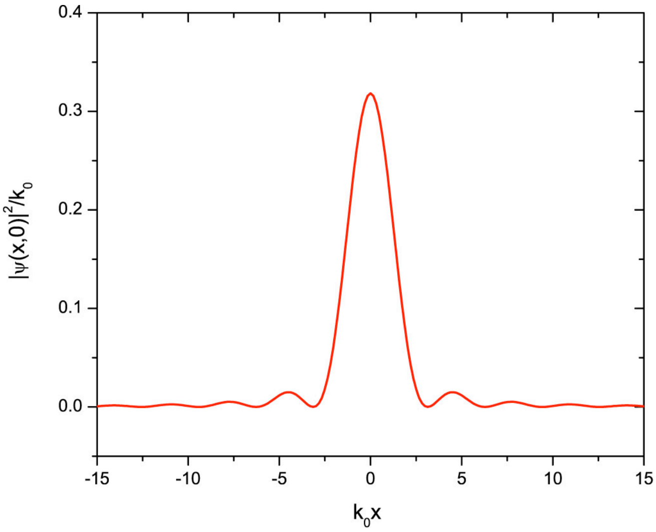
(c) Akımın korunumu

$$\left(|A|^2-|B|^2\right)\frac{\hbar k}{m} = |C|^2\frac{\hbar k}{m}$$
$$\text{veya } R+T = 1. \tag{9}$$

olmasını gösterir zira parçacığın hızı x<0 ve x>0 için aynıdır. Bunu değiştirmek için,

$$V(x)=\begin{cases} V_0\delta(x) & x=0 \text{ için} \\ 0 & x<0 \text{ için} \\ V_1 & x>0 \text{ için} \end{cases}.$$

gibi bir potansiyele ihtiyaç duyarız, öyleki parçacık hızı x<0 ve x>0 arasında farklıdır.



Şekil 2: $|\psi(x,t)|^2 / k_0$ karşın $k_0 x$.

(d)

$$J_{x<0} = \left(|A|^2 - |B|^2\right)\frac{\hbar k}{m}. \tag{10}$$

Gelen parçacık yoğunluğu

$$|A|^2 = \frac{1}{\lambda_{dB}} = \frac{k}{2\pi} \tag{11}$$

$$\Longrightarrow J_{inc} = |A|^2 \frac{\hbar k}{2m} = \frac{\hbar k^2}{2\pi m}. \tag{12}$$

olur.

(e) ψ, x=0'da süreklidir

$$\Longrightarrow A + B = C. \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
\psi'(x=+\epsilon) - \psi'(x=-\epsilon) &= \frac{2m}{\hbar^2} V_0 \psi(0) \\
\Longrightarrow ikC - ik(A-B) &= \frac{2m}{\hbar^2} V_0 C \\
\Longrightarrow C &= \frac{A-B}{1+i\frac{2mV_0}{\hbar^2 k}} = A + B \\
\Longrightarrow A\left(-i\frac{2mV_0}{\hbar^2 k}\right) &= B\left(2 + i\frac{2mV_0}{\hbar^2 k}\right) \\
R &= \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \frac{(kV_0)^2}{4E^2 + (kV_0)^2}. \qquad (14)
\end{aligned}$$

Limit durumunda $V_0 \to 0$, R$\to$0, dır.