

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Kuantum Mekaniği I (8.04) Bahar 2006

Pratik Sınav I Çözümleri

1. Kısa Problemler (30 puan)

a) i. (5 puan) Eğer, α -parçacıkları hafif elektronları saçındırıp atarlarsa, α -parçacıklarının bir Au tabakadan geri saçınmaları beklenildiğinden daha fazla olmaktadır. Bu pozitif yük ve kütle için uzayın çok küçük bir bölgesine yoğunluğunu belirtir.

ii. (5 puan) Pozitif çekirdekler için, α -parçacıkları çekirdeğe nüfuz ederlerse Rutherford bağıntısı bozunur. Geri saçınmadaki en yakın yaklaşım (dönüm noktasında KE=0 dır)

$$E = \frac{ZZ'q^2}{4\pi\epsilon_0 R} . \quad (1)$$

burada $R = 10^{-15}$ m çekirdeğin yarı çapıdır.

$$E = \frac{2.47 \cdot (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{4\pi \cdot 8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{Nm}^2) \cdot 10^{-15} \text{ m}} = 2.2 \times 10^{-11} \text{ J} = 135 \text{ MeV} . \quad (2)$$

b) (10 puan) Fotonun en büyük enerji kaybı, elektrona momentum aktarımından dolayıdır ve bu en büyük kaymaya karşı gelir. $\theta=\pi$ için en büyük momentum aktarımı

$$E' = \frac{1}{2} E , \quad (3)$$

olup, burada E ve E', saçınmadan önceki ve sonraki foton enerjileridir.

$$\lambda' = 2\lambda \quad (4)$$

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \pi) = \frac{2h}{mc} \quad (5)$$

$$\lambda' - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda = \frac{2h}{mc} \quad (6)$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{2h} mc = \frac{1}{2} mc^2 = \frac{1}{2} \cdot 511 \text{ MeV} = 256 \text{ MeV} . \quad (7)$$

c) (10 puan)

$$eU = \frac{hc}{\lambda} \implies U = \frac{hc}{e\lambda} = 12.4 \text{ eV} \quad (8)$$

Kesri düzeltme: $\frac{5 \text{ eV}}{12.4 \text{ keV}} = 4 \times 10^{-4}$.

(a) (5 puan) Normalleştirme şartı şunu gerektirir ki

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 dx = 1 \quad (27)$$

bu durumda bu bağıntı şöyle olur

$$\int_{-b}^{3b} |A|^2 dx = 1 = 4b |A|^2 \quad \implies \quad A = \frac{1}{2\sqrt{b}} \quad (28)$$

(b) (5 puan) $x \in [0, b]$ bölgesinde parçacığın bulunma olasılığı şöyle verilmiştir.

$$\int_0^b |\psi|^2 dx = \int_0^b \frac{1}{4b} dx = \frac{1}{4} \quad (29)$$

c) (10 puan) Beklenti değerleri şunlardır

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x |\psi|^2 dx = \int_{-b}^{3b} x \frac{1}{4b} dx = b \quad (30)$$

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi|^2 dx = \int_{-b}^{3b} x^2 \frac{1}{4b} dx = \frac{7}{3} b^2 \quad (31)$$

d)

Momentum olasılık yoğunluğu = $|\phi(p)|^2$

$$\begin{aligned}
 \phi(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{-ipx/\hbar} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-b}^{3b} dx A e^{-ipx/\hbar} \\
 &= \frac{i\hbar A}{\sqrt{2\pi\hbar} p} \left[e^{-ipx/\hbar} \right]_{-b}^{3b} \\
 &= \frac{iA}{p} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} \left[e^{-3ipb/\hbar} - e^{+ipb/\hbar} \right] \\
 &= \frac{2A}{p} \sqrt{\frac{\hbar}{2\pi}} e^{-ipb/\hbar} \underbrace{\frac{1}{2i} \left[e^{+2ipb/\hbar} - e^{-2ipb/\hbar} \right]}_{\sin(2pb/\hbar)}
 \end{aligned}$$

$$|\phi(p)|^2 = \frac{2A^2 \hbar}{p \pi} \sin^2\left(\frac{2pb}{\hbar}\right)$$

3. Heisenberg belirsizliđi (25 puan)

(a) (10 puan)

$$p = \frac{h}{R} \quad (9)$$

$$E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2 = m^2 c^4 + \frac{h^2 c^2}{R^2} \quad (10)$$

$$\frac{hc}{R} = \frac{6.6 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \cdot 3 \times 10^8 \text{ m/s}}{10^{-15} \text{ m}} = 2.0 \times 10^{-10} \text{ J} = 1.2 \text{ GeV} \quad (11)$$

$$(12)$$

Nötronun durgun kütlesi

$$m_n c^2 = m_p c^2 = 0.9 \text{ GeV} . \quad (13)$$

(b) (15 puan) Rölativistik olmayan hesaplama zira $E=1 \text{ keV} \ll mc^2$.
Elektron darbesinin uzunluđu $x = vt$.

Heisenberg belirsizliđinden $\Delta p = \frac{\hbar}{2x}$.

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta p}{p} = \frac{\hbar}{2x} \frac{1}{mv} = \frac{\hbar}{2mv^2 t} = \frac{\hbar}{4Et} = \frac{1.05 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}}{4 \times 10^3 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \cdot 10^{-9} \text{ s}} = 1.6 \times 10^{-10} \quad (14)$$

4. Çift yarık deneyi (15 puan)

(a) (5 puan)

$$\Psi_1 = Ae^{i\varphi_1} \quad (15)$$

$$\Psi_2 = Ae^{i\varphi_2} \quad (16)$$

$$|\Psi_D|^2 = 2|A|^2 (1 + \cos(k(L_1 - L_2) + \phi_1 - \phi_2)) \quad (17)$$

Girişim deseni $\Delta x = s \frac{\phi_1 - \phi_2}{2\pi}$ ile değişir, tezat değişmez.

(b) (5 puan)

$$\Psi_1 = A \quad (18)$$

$$\Psi_2 = \frac{1}{2}A \quad (19)$$

$$\Psi_D = Ae^{ikL_1} + \frac{A}{2}e^{ikL_2} \quad (20)$$

$$|\Psi_D|^2 = |A|^2 \left(e^{ikL_1} + \frac{1}{2}e^{ikL_2} \right) \left(e^{-ikL_1} + \frac{1}{2}e^{-ikL_2} \right) \quad (21)$$

$$= |A|^2 \left(1 + \frac{1}{2} \left(e^{ik(L_1-L_2)} + e^{-ik(L_1-L_2)} \right) + \frac{1}{4} \right) \quad (22)$$

$$= |A|^2 \left(\frac{5}{4} + \cos(k(L_1 - L_2)) \right) \quad (23)$$

$$= \frac{5}{4} |A|^2 \left(1 + \frac{4}{5} \cos(k(L_1 - L_2)) \right) \quad (24)$$

$$\Rightarrow I_{min} = \frac{1}{5} \quad (25)$$

$$I_{max} = \frac{9}{5} \quad (26)$$

$$\Rightarrow C = \frac{9/5 - 1/5}{9/5 + 1/5} = \frac{8/5}{10/5} = \frac{4}{5} \quad (27)$$

Konum değişmez.

(c) (5 puan)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{dB}} = \frac{2\pi p}{h} \quad (28)$$

burada p elektron/müon momentumudur. Sabit enerji için, $p \propto \sqrt{m}$, $\lambda_{dB} \propto \frac{1}{p} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$

$$\int_0^b |\psi|^2 dx = \int_0^b \frac{1}{4b} = \frac{1}{4} \quad (29)$$

Girişim deseninin konumsal sıklığı 14 kat azalmıştır.