

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.10

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 1(2)

11 Mayıs Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. İşlemciler ve Harmonik salınıcı (HO) (30 puan)

$|0\rangle$, harmonik salınıcının normalleşmiş taban durumu olsun ve $\hat{a}|0\rangle=0$ ve $\langle 0|0\rangle=1$ olarak tanımlanmıştır. Burada \hat{a} alçaltma (veya yok etme) işlemcisi ve \hat{a}^+ ise yükseltme (veya yaratma) işlemcisidir.

- (5puan) $|\tilde{n}\rangle = (a^+)^n |0\rangle$ olarak tanımlanan normalleşmemiş n-inci öz durum $|\tilde{n}\rangle$ 'in uzunluğunun, $\sqrt{n!}$ ile verildiğini gösteriniz.
- (5puan) a)'nın bir sonucu olarak, n-inci normalleşmemiş öz durum $|n\rangle$,
 $|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^+)^n |0\rangle$ ile verilmiştir. Öz durumların ortonormal olduğunu ispatlayınız, yani $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ olduğunu gösteriniz.
- (5puan) $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ve $\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ olduğunu gösteriniz.
- (5puan) $\hat{n} \equiv \hat{a}^+ \hat{a}$ ile verilen bir \hat{n} işlemcisini tanımlayınız. \hat{n} 'in bir Hermite-sel işlemci olduğunu gösteriniz. Sonuç olarak, \hat{n} ölçülebilir bir niceliği temsil eder. $\hat{n}|n\rangle$ 'i hesaplayınız. \hat{n} 'in temsil ettiği fiziksel niceliği nedir? \hat{n} 'in öz durumları ve özdeğerleri nelerdir?
- (5puan) \hat{x} ve \hat{p} 'yi \hat{a} ve \hat{a}^+ cinsinden ifade ediniz. $\langle m|\hat{x}|n\rangle$ ve $\langle m|\hat{p}|n\rangle$ 'yi hesaplayınız ve $m = n+1$ olmazsa yok olacaklarını gösteriniz.
- (5puan) \hat{x}^2 ve \hat{p}^2 'yi \hat{a} ve \hat{a}^+ cinsinden ifade ediniz. Harmonik salınıcının n'inci öz durumunda, x ve p belirsizlik çarpımının $\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2}(2n+1)$ ile verildiğini gösteriniz.

2. HO'nun bağdaşık durumları (40puan)

Keyfi bir kompleks sayı α ile bir $|\alpha\rangle$ durumu, $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ özdenkleme tabi olursa buna bağdaşık bir durum denilir.

- (5puan) $\hat{a}(\hat{a}^+)^n |0\rangle = \hat{n}(\hat{a}^+)^{n-1} |0\rangle$ olduğunu gösteriniz.
- (10puan) C normalleştirme sabiti olmak üzere, bağdaşık durumun $|\alpha\rangle = C_{\text{exp}}(\alpha \hat{a}^+) |0\rangle$ şeklinde yazılabildiğini gösteriniz.
- (5puan) C normalleştirme sabitini hesaplayınız.
- (10puan) Bağdaşık durumu, normalleşmiş öz durumlar $|n\rangle$ cinsinden açınız, ve HO'yu n-inci öz durumda bulunma olasılığını hesaplayınız (veya eşdeğer olarak, sistemde n adet kuantum bulmak). Poisson dağılımını elde etmelisiniz.
- (10puan) Bağdaşık durumda, kuantaların $\langle n\rangle = \langle \alpha|\hat{n}|\alpha\rangle$ ortalama sayısını hesaplayınız. Bir lazer veya radyofrekans salınıcı tarafından iyice belirlenmiş bir genlik ve fazlı klasik sistemlere enyakın kuantum mekaniksel analog, bağdaşık durumlardır.

3. İzdüşüm işlemcisi (10puan)

$|n\rangle$, Hermite-sel bir işlemcinin öz durumunu vermiş olsun. $\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|$ işlemcisine izdüşüm işlemcisi adı verilir. $\hat{P}_m \hat{P}_n = \delta_{nm} \hat{P}_n$ olduğunu gösteriniz. Keyfi bir durumun, bir Hermite-sel işlemcinin $|n\rangle$ öz durumlarına açılımını kullanarak $\sum_n \hat{P}_n = \hat{1}$ olduğunu gösteriniz, burada $\hat{1}$ birim işlemcidir.

4. Açıl momentum öz durumundaki bir parçacık (20puan)

Bir parçacık, L^2 ve L_x 'in bir $|l,m\rangle$ öz durumundadır. Buna göre:

- (10puan) Bu durumda $\langle L_x \rangle = \langle L_y \rangle = 0$ olduğunu gösteriniz.
- (10puan) $\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \frac{\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m^2}{2}$ olduğunu gösteriniz.

İpuçları : a) şıkkı için L_+ ve L_- yi kullanınız . b) şıkkı için $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ yi kullanınız.