

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.7

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 1(3)

13 Nisan Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. Boşlukta Gauss dalga paketi (30 puan)

m kütleli serbest bir parçacığın başlangıç dalga fonksiyonu

$$\psi(x, t = 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} w_0^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4w_0^2}},$$

olup, burada dalga paketinin başlangıç genişliği w_0 gerçel, pozitif bir sayıdır.

Daha önceden $\psi(x, 0)$ 'ın Fourier dönüşümünü hesaplamıştınız ve bunun $k_0 = 1/(2w_0)$ olmak üzere

$$\phi(k, t = 0) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} k_0^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{4k_0^2}},$$

olduğunun göstermişsiniz.

a) (15 puan) Daha sonraki bir zamanda dalga fonksiyonunun

$$\psi(x, t) = \frac{w_0^{1/2}}{(2\pi)^{1/4} \chi(t)} e^{-\frac{x^2}{4[\chi(t)]^2}},$$

ile verildiğini gösteriniz. Burada dalga paketini t zamanında belirleyen kompleks nicelik

$$\chi(t) = w_0 \sqrt{1 + \frac{i\hbar t}{2mw_0^2}}.$$

olarak verilmiştir.

(Boşlukta momentum özfonksiyonlarının aynı zamanda enerji özfonksiyonları oldukları gerçeğini kullanınız.)

b) (5 puan) $|\psi(x, t)|^2$ yi hesaplayınız ve bunun bir Gauss dalga paketini temsil ettiğini gösteriniz. Olasılık yoğunluğunu

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} w(t)} e^{-\frac{x^2}{2[w(t)]^2}}$$

Şeklinde yazarsak, dalga paketinin zamana bağlı (gerçel) genişliği $w(t)$ nedir? Bu $w(t)$ genişliği ileriki zamanlarda başlangıç genişliği w_0 'a bağımlıdır?

c) (10 puan) Dalga fonksiyonunun zamanla evrimini, $\phi(k, t)$ dalga vektörü temsilinde (bkz yukarıya) tayin ediniz. Dalga vektörü uzayında olasılık yoğunluğu $|\phi(k, t)|^2$ yi yazınız, ve bunun zamanla dağılmadığını veya momentum uzayında büzülmediğini, eğer biri diğerinin Fourier dönüşümü ise, gösteriniz.

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.7

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 2(3)

13 Nisan Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

Kullanışlı formül :

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha(x-\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ olmak üzere herhangi kompleks } \alpha, \beta \text{ için}$$

2. Hermite-sel ek işlemciler ve Hermite-sel işlemciler (25 puan)

Bir \hat{A} işlemcisi için Hermite-sel ek işlemciyi \hat{A}^+ $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ herhangi iki dalga fonksiyonları için

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\hat{A}^+ \psi_1(x))^* \psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1^*(x) \hat{A} \psi_2(x),$$

bağıntısı ile tanımlıyoruz.

Burada işlemci her zamanki gibi sağındaki dalga fonksiyonuna etki eder, ve eşitliğin sol tarafındaki parantezlerse \hat{A}^+ işlemcisinin yalnızca $\psi_1(x)$ 'e etki ettiğini işaret eder.

a) (5puan) Ek işlemci \hat{A}^+ nın beklenti değerinin herhangi durumda \hat{A} 'nın beklenti değeri \hat{A} ile $\langle \hat{A}^+ \rangle = \langle \hat{A} \rangle^*$ ilintili olduğunu gösteriniz.

b) (5puan) Herhangi iki \hat{A}, \hat{B} işlemci için $(\hat{A}, \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$ olduğunu gösteriniz.

c) (5puan) Bir işlemci eğer $\hat{A}^+ = \hat{A}$ ise, Hermite-sel veyahut kendine-ek olarak adlandırılır. Bir Hermite-sel işlemcinin özdeğerlerinin gerçek olduğunu gösteriniz.

d) (5puan) Eğer \hat{A} ve \hat{B} Hermite-sel işlemci iseler, bu taktirde $\hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$ nin de Hermite-sel olduğunu gösteriniz.

e) (5puan) Tek yönde hareket eden bir parçacık için $\hat{x}\hat{p}$ işlemcisinin Hermite-sel olmadığını gösteriniz. Bu fiziksel gözlemlenir çarpıma karşı gelen ve Hermite-sel olan bir işlemciyi oluşturunuz.

3. Değiş- tokuşcular (komütatörler). (20puan)

\hat{A}, \hat{B} işlemcileri arasındaki $[\hat{A}, \hat{B}]$ komütatörünü $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ işlemcisi gibi tanımlıyoruz.

a) (5puan) $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ gibi herhangi üç işlemci için

$$[\hat{A} + \hat{B}, \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{B}, \hat{C}] \text{ ve } [\hat{A}\hat{B}, \hat{C}] = \hat{A}[\hat{B}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{C}]\hat{B}$$

bağıntılarının geçerli olduğunu gösteriniz.

b) (5puan) Ya konum veyahut momentum işlemcilerinden birini kullanarak, konum ve momentum işlemcileri arasındaki $[\hat{x}, \hat{p}]$ komütatörünü hesaplayınız. (işlemcilerin sağındaki dalga vektörlerine etkidiğini hatırlayınız)

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.7

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 3(3)

13 Nisan Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

c) (5puan) $[\hat{x}, \hat{p}^2] = 2i\hbar\hat{p}$ olduğunu gösteriniz.

d) (5puan) İki işlemcinin eğer $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ ise değiş-tokuş ettiği söylenir. Boşluktaki bir parçacık için Hamilton işlemcisiyle, konum işlemcisi değiş tokuş yapabilir mi? Aynı parçacık için Hamilton işlemcisi momentum işlemcisiyle değiş tokuş yapabilir mi? İki işlemci değiş tokuş yaparsa bu taktirde her iki işlemcinin ortak öz fonksiyonlarının bir kümesinin teşkil edilebileceğini derste göstereceğiz.

4. Serbest parçacık. (10puan)

Bir boyutta hareketli parçacık

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx (\hat{A}^+ \psi_1(x))^* \psi_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1^*(x) \hat{A} \psi_2(x),$$

a gerçel bir sabit olmak üzere, durumundadır

a) (5puan) Momentumun hangi değerleri bulunamayacaktır?

b) (5puan) Parçacık hangi momentum durumunda en muhtemel olarak bulunur?

5. Eş zamanlı (simultane) öz durumlar (15puan)

Önceki yıldan 8.04 sınıfındaki bir arkadaşınız şunu iddia ediyor: eğer bir parçacık a ebatlı tek-boyutlu bir kutunun bir öz durumunda ise, onun enerjisini tam olarak biliriz. Kutudaki bu enerjinin saf olarak kinetik olduğunu da biliyoruz. Böylece parçacığın momentumunu da tam olarak biliriz. Bu durum Heisenberg belirsizlik bağıntısı ile bir tezat teşkil eder, zira parçacığın konumundaki belirsizlik ($\Delta x = a$) sonludur. Arkadaşınızın iddiasına bir darbe vurunuz.