

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.6

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 1(2)

6 Nisan Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. Kutu potansiyelindeki dalga fonksiyonun zaman evrimi (40 puan)

a ebadlı sonsuz duvarlara sahip bir kutu içerisinde m kütleli bir parçacık ele alalım.
Potansiyel fonksiyonu

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq a \\ \infty & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

$t=0$ 'da belirlenmiş bir dalga fonksiyonunun zaman evrimi tayin etmeyi istiyoruz.

$\psi(x, t=0) = C (2\sin kx + 3\sin 2kx + \sin 3kx)$, $k = \pi/a$ kabul ediniz.

a) (5 puan) C normelleştirme katsayısını o şekilde bulunuz ki $|\psi(x, t)|^2$ bir olasılık yoğunluğu olarak yorumlanabilsin.

b) (10 puan) Dalga fonksiyonu $\psi(x, t=0)$ olmak üzere sonsuz kutunun $u_n(x)$ öz

fonskiyonları cinsinden açınımına tabi tutunuz, yani $c_n = \int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x) \psi(x, 0) dx$ katsayılarını

bulunuz ve böylece $\psi(x, t=0)$ 'ı sonsuz kutunun öz durumlarının bir üstüste binmesi gibi yazabilirsiniz.

c) (5 puan) ($\omega_n = E_n / \hbar$ açısal hızında, E_n durumun öz enerjisi olmak üzere, oluşan negatif faz faktörü) ile öz durumların bilinen zaman evrimi kullanarak, daha sonraki keyfi bir t anında $\psi(x, t)$ 'yi bulunuz. [Elinizde mathematica veya Matlab varsa, $|\psi(x, t)|^2$ nin bir filmi yapabilirsiniz]

d) (5 puan) Hareket periyodik midir? $\psi(x, 0) = \psi(x, T)$ bağıntısını sağlayan bir T zamanı var mıdır?

e) (5 puan) Parçacık enerjisinin bir ölçümü yapılmış ise sonuç (sonuçlar) ne olacaktır ve hangi olasılıkla bunlar ölçülebilecektir?

f) (5 puan) Kutudaki parçacığın ortalama enerjisi nedir? Eğer hiçbir ölçüm yapılmamış ise o zamanla değişirmi?

g) (5 puan) Eğer bir enerji ölçümü yapılırsa, parçacığın enerjisi değişirmi? Enerji korunumu hakkında ne söylersiniz?

2. Sonsuz bir kutunun diyabatik (ani) genişmesi (25 puan)

a ebadlı sonsuz bir potansiyel kuyusu $x=0$ ila $x=a$ arasındaki kutuda bulunurken, m kütleli bir parçacık kutunun taban durumunda hazırlanmıştır. Aniden, $x=a$ 'daki duvar $x=2a$ 'ya bir Δt zamanında öteleniyor ve kutunun ebatı iki katına çıkarılıyor. Eğer bu değişme yeterince hızlı olursa, değişmeden hemen sonra dalga fonksiyonunun aynı olduğunu kabul edebilirsiniz.

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.6

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 2(2)

6 Nisan Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

- a) (5 puan) Ne kadar hızlı yeterince hızlıdır? ($\Delta t=0$ bir matematikçinin cevabı olup, bir fizikçi için yeteri kadar iyi bir cevap değildir.)
- b) (5 puan) Değişmeden hemen sonra, parçacığın yeni kuyunun ($n=2$) ikinci durumunda bulunma olasılığı nedir? (Kuyudaki dalga boyu ve böylece enerjinde bu yeni durum için, eski kuyudaki başlangıç durumununki ile aynı olduğuna dikkat ediniz.) Hesaplamalarınızda düzgün olarak normalleştirilmiş dalga fonksiyonlarını kullanmaya özen gösteriniz.
- c) (5 puan) Parçacığın yeni kuyunun taban durumunda bulunabilme olasılığı nedir?
- d) (5 puan) Ani genişmeden önce ve hemen sonra parçacık enerjisinin beklenti değeri nedir?
- e) (5 puan) Parçacığın yeni potansiyelin taban durumunda bulunabilme olasılığının bire sahip olmasını garantiye almak isterseniz, potansiyeli (zaman ölçeği) nasıl değiştirirsiniz?
- a) ve e) hesaplamaları gerektirmez, ancak yanıtınızı bir cümle ile açıklayınız.

3. Hermite-sel işlemciler (15 puan)

Bir Hermite-sel işlemci sadece gerçel özdeğerlere sahip olan bir işlemcidir.

- a) (5 puan) $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$ Hamiltonunun bir Hermite-sel işlemci olduğunu gösteriniz
- b) (5 puan) Bir enerji öz durumundaki Hamilton işlemcisinin $\langle H \rangle$ beklenti değerinin, o durumun öz enerjisine eşit olduğunu gösteriniz.
- c) (5 puan) Momentum uzayındaki $x = i\hbar \frac{\partial}{\partial p}$ konum işlemcisinin bir Hermite-sel işlemci olduğunu gösteriniz.

4. Başlangıç noktasındaki merkezlenmiş kare dalga, çiftlenim (parite) (20 puan)

$x = 0$ da merkezlenmiş a ebatlı bir sonsuz kare kutu için uygun sınır şartları altında zamana bağlı, Schrödinger denklemini çözünüz, yani

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a/2 \leq x \leq a/2 \text{ için} \\ \infty & \text{diğer yerlerde} \end{cases}$$

- a) (10 puan) $x=a/2$ 'de merkezlenmiş a ebatlı sonsuz bir kuyuda derste edilen sonuçlarla uyumlu izinli enerjilerin olduğunu kontrol ediniz. $x \rightarrow x-a/2$ değişikliğini birisi kullanırsa, $\psi(x)$ dalga fonksiyonlarının derste bulduklarımızdan elde edilebileceğini doğrulayınız.
- b) (5 puan) Bir çiftlenim işlemcisi P yi $P\psi(x) = \psi(-x)$ ile tanımlarız. Yukarıdaki potansiyelin enerji öz durumlarının aynı zamanda çiftlenim işlemcisinin öz durumları olduklarını ispatlayınız. Buna karşı gelen özdeğerler nedir? Aynıısı $x=a/2$ de merkezlenmiş bir kuyunun özdeğerleri içinde geçerlimidir?
- c) (5 puan) Ya $V(x)$ potansiyeli veyahut Hamilton işlemesi üzerinde genel bir şart bulalım ki bu enerji öz durumlarının eş zamanlı olarak çiftlenim işlemcisinde öz durumları olmasını garanti etsin.