MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006 Fizik 8.04 Vuletic
Ödev No.5 Sayfa 1(3)
23 Mart Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. **Olasılık yoğunluğu ve akımı için süreklilik denklemi** (20 puan)

Bir parçacık bir $\psi(x,t)$ dalga fonksiyonu ile betimlenmiş bir durumdadır

a)(10 puan) Schrödinger denklemi kullanarak, olasılık yoğunluğu $P(x,t) = |\psi(x,t)|^2$ nin süreklilik denklemi

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t) + \frac{\partial}{\partial x} J(x,t) = 0 ,$$

ye tabi olduğunu, olasılık akımı $J(x,t)$ yi

$$J(x,t) = \frac{\hbar}{2im}\left(\Psi^*(x,t)\frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial \Psi^*(x,t)}{\partial x}\Psi(x,t)\right).$$

olarak tanımlarsak, gösteriniz.

b)(10 puan) Süreklilik denkleminin bir integral şeklini yazınız, yani yukarıda tanımlanan J akımı ve $P_{ab}(t)$ olasılağı arasındaki bağıntı olup, bu $a \leq x \leq b$ gibi sonlu bir aralık içinde bulunmaktadır. Bu bağıntının fiziksel anlamını cümleyle ifade ediniz.

2. **Sanal Bohr atomu** (20 puan)

Elektronun çekirdeğe bir $V(r) = -\frac{C_6}{r_6}$ potansiyeli ile bağlı olduğu sanal bir Bohr atomu için Balmer formülünün neye benzeyeceğini bulunuz. Bohr kuantlaşma şartı $L=n\hbar$'yi çembersel yörüngelerin açısal momentumu kullanarak, farklı kuantum sayısı n'lere karşı gelen enerji düzeylerini hesaplayınız ve Balmer formülünün hangi geçişlere karşılık geldiğini hatırlayınız. Rydberg sabitine karşı gelecek olan niceliği bulunuz ve onu C_6,elektron kütlesi m ve $\hbar$ cinsinden ifade ediniz.

3. **Tek boyutlu doğrusal potansiyel için Sommerfeld -Wilson kuantlaşması** (25 puan)

C>0, $V(x)=C|x|$ doğrusal potansiyeli içinde m kütleli bir parçacığı ele alalım. Böyle bir potansiyelde kuantlaşmış enerji düzeylerini tayin etmek istiyoruz.

a) A>0, $x(t=0) = A$ ve $p(t,0)=0$ olsun. $x(t)$ ve $p(t)$'yi bir T peryodu için hesaplayınız. T ne kadar büyüktür?

b) $\oint = p(x)dx$'i hesaplayınız, yani integrali bir peryotta, C, parçacık kütlesi m, ve hareketin A genliğinin bir fonksiyonu olarak alınız.

c) A_n genliği üzerinde bir kuantum mekaniksel şartı belirlemek için şimdi Sommerfeld – Wilson kuantlaşma şartını kullanınız. A_1 taban durumu, yani n = l için genlik değeri nedir?

d) En kuantlaşmış enerji düzeylerini hesaplayınız. $V(x)$ potansiyelini çiziniz ve kuantlaşmış E_n enerji düzeylerini hesaplayınız. Enerji düzeyleri arasındaki aralığın n kuantum sayısına bağlılığını Bohr atomuyla kıyaslayınız.

Faz uzayında hareketi, yani bir momentum-konum diyagramında çiziniz. Sommerfeld-Wilson kuantlaşma şartının geometrik anlamı nedir? Bir cümlede, faz uzayında durağan durumları nasıl betimleyebilirsiniz?

4. **Konumsal dalga fonksiyonları cinsinden momentum beklenti değerleri** (20puan)
Bir $g(p)$ momentum fonksiyonunun, dalga vektörü (veya momentum) uzayındaki olasılık yoğunluğu cinsinden beklenti degerini

$$\left\langle g(p)\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dk\; g(\hbar k)\left|\tilde{\phi}(k)\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dp\; g(p)\left|\phi(p)\right|^2$$

$g(p)=p$ için bu basitçe $\left\langle p\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar k\left|\tilde{\phi}(k)\right|^2 dk = \int_{-\infty}^{\infty} p\left|\phi(p)\right|^2 dp$

olarak tanımlamıştık.

Bunun yerine, momentumun beklenti değerini doğrudan konumsal dalga fonksiyonundan

$$\left\langle p\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)\psi(x) \quad ,$$

ve genelde

$$\left\langle p^n\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\psi^*(x)\left(\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)^n \psi(x)\,.$$

den hesaplayacağımızı gösteriniz.

Bu konumsal tanım aralığında, p momentumunun bir işlemci $\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ olarak temsil edildiği anlamındadır.

Benzer şekilde konum işlemcisinin beklenti değerinin

$$\left\langle x\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi^*(p)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)\phi(p) \qquad \text{ve}$$

$$\left\langle x^n\right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dp\,\phi^*(p)\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial p}\right)^n \phi(p)\,.$$

olarak yazılabileceğini gösteriniz.

Momentum tanım aralığında parçacığın konumu x'in temsili nedir?

5. **Olasılık akımı için bağıntılar**. (15 puan)

a) (5puan) Olasılık akımının şu şekilde yazılabileceğini gösteriniz.

$$J(x,t) = \frac{1}{2m}\left[\Psi^*(x,t)\,\hat{p}\Psi(x,t) + \left(\Psi^*(x,t)\,\hat{p}\Psi(x,t)\right)^*\right].$$

b) (10puan) kompleks bir $V(x)^* \neq V(x)$ potansiyelinin süreklilik denklemini sağlamadığını gösteriniz.