MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006 | Fizik 8.04 | Vuletic
Ödev No.3 | Sayfa 1(3)
2 Mart Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. **Compton etkisi ve elektron geri sıçraması** (25 puan)

   (a) Serbest bir elektron için kendisiyle çarpışan tek bir fotonun enerjisinin tamamını soğurmasının mümkün olmadığını gösteriniz.

   (b) Bir serbest, başlangıçta durağan elektrondan saçınan bir foton için Compton dalga boyu kaymasının

   $$\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_0 = \lambda_c (1 - \cos\theta),$$

   olduğunu gösteriniz ki burada θ foton saçınım açısı, λ_0 gelen fotonun, λ_1 ise saçınan fotonun ve λ_c de Compton dalga boyudur. Compton dalga boyunun sayısal değerini hesaplayınız.

   (c) Dalga boyundaki, $\Delta\lambda$, Compton kayması gelen foton enerjisi $E_0 = h\nu_0$' den bağımsızdır. Ancak, Compton kayma enerjisi, $\Delta E = E_1 - E_0$ kuvvetli bir şekilde E_0'a bağlıdır. Compton enerji kayması ΔE için ifadeyi bulunuz. (Foton çarpışmada enerjiyi kazanırmı yoksa kaybeder mi?). $\theta = \pi/2$ kabul ederek enerjideki kesirsel kaymanın sayısal değerini bir 10 keV ve birde 10 MeV foton için hesaplayınız.

   (d) Compton etkisini görünür ışıkla mı veya x-ışınlarıyla gözlemlemek daha kolaydır? Niçin?

   (e) Saçınan fotonla geri sıçrayan elektron hareket yönleri arasındaki bağıntının

   $$\cot\frac{\theta}{2} = \left(1 + \frac{h\nu_0}{m_e c^2}\right)\tan\phi,$$

   olduğunu gösteriniz ki burada ϕ açısı geri sıçrayan elektronun yönünü belirler.

2. **Delta fonksiyonları ile alıştırma** (10 puan)
   Dirac delta fonksiyonu şöylece tamamlayabilir ki herhangi f(x) fonksiyonu için,

   $$\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \text{ için} \\ 0 & x \neq 0 \text{ için} \end{cases}, \text{ öyleki } \int_{-\infty}^{\infty} dx\,\delta(x) f(x) = f(0)$$

   Aşağıdaki integrali elde ediniz:

   a) $\int_{-3}^{1} dx \left(x^4 - 4x^3 + 2x\right)\delta(x+2)$,

   b) $\int_{0}^{\infty} dx \left[\cos(3x) + 2e^{ix}\right]\left(\delta(x-\pi) + \delta(x)\right)$.

3. **Gauss dalga paketi ve Heisenberg belirsizlik bağıntısı** (50 puan)
Ödev 3, problem 3 te ele alınan Gauss dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} w_0^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4w_0^2}},$$

ve bunun Fourier dönüşümü $\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} k_0^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{4k_0^2}}$ yi ele alalım.

a) (5 puan) $\psi(x)$'in normalleştirilmiş olduğunu gösteriniz, yani $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$.

Parseval teoreminden bildiğimize göre Fourier dönüşümü otomatik olarak normalleştirilmiştir, $\int_{-\infty}^{\infty} |\phi(x)|^2 dx = 1$

b) (5 puan) konumun $\langle x \rangle$ ve momentumun $\langle p \rangle$ beklenti değerleri

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x|\psi(x)|^2 dx \qquad \text{ve} \qquad \langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \hbar k|\phi(k)|^2 dk .$$

ile verilir. $\langle x \rangle$ ve $\langle p \rangle$ yi hesaplayınız. (İpucu: simetrinin avantajını ele alınız.)

$\langle p \rangle$ için bağıntının doğru olduğunu kabul ederseniz, $|\phi(k)|^2$ niceliğini (bir cümle ile) nasıl yorumlayabilirsiniz?

c) (20 puan) Genel olarak konum koordinatı x'in herhangi f(x) fonksiyonu veya momentum koordinatı p'nin $g(p)$ fonksiyonuna ait $\langle f(x) \rangle$, $\langle g(x) \rangle$ beklenti değerleri

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)|\psi(x)|^2 dx \quad \text{ve} \quad \langle g(p) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} g(\hbar k)|\phi(k)|^2 dk .$$

ile verilir. Buna göre $\langle x^2 \rangle$ ve $\langle p^2 \rangle$ yi hesaplayınız.

d) (10 puan) x konumundaki Δx ve p momentumundaki Δp belirsizlikler formel olarak

$(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2$ ve $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2$.

olarak tanımlanmıştır.

Δx ve Δp'yi hesaplayınız. $\Delta x \Delta p$ çarpımını, Heisenberg bağıntısı ile izin verilen değerle kıyaslayınız.

e) (10 puan) Şimdi uzayda bir x_0 miktarıyla yer değişmiş aynı aralıktaki bir Gauss dalga paketini kabul edelim,

$$\overline{\psi}(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} w_0^{1/2}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4w_0^2}} .$$

Buna göre $\overline{\phi}(k)$ Fourier dönüşümünü hesaplayınız. Bir momentum dağılım ölçümü, $x_0 = 0$'da hazırlanmış olan ilk dalga paketi $\psi(x)$ için yapılan bir ölçümden daha farklı bir sonuç mu verecektir? Bulgunuzu bir cümle ile yorumlayınız.

4. **Çocuksu hassaslık deneyi** (15 puan)

H yüksekliğindeki bir merdivenin en üstünde bulunan bir çocuk m kütleli bilyaları döşemeye doğru bırakarak buradaki bir çatlağı vurmaya çalışmaktadır. Hedefe isabet ettirmek için çocuk en fazla olası hassas aygıtı kullanıyor. Hava direnci ve hafif esintilerin etkilerinin tamamen ihmal edildiğini kabul ediniz. Bilyaların, çatlağı $(\hbar/m)^{1/2}(2H/g)^{1/4}$ mertebesinde tipik bir mesafe ile vuramayacağını gösteriniz, burada g yerçekimi ivmesidir. H = 3m, $m=10^{-2}$ kg için bu mesafe ne kadar büyüklükte olur? Başka bir deneyci aynı deneyi ^{133}Cs atomları ile yapmaya karar verir ve bunu H=0,2 m'lik düşüş yüksekliğinde dener. Bu deneyci aynı etkiyi gözlemleyebilir mi?