

23 Şubat Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

1. **Parseval Teoremi** (10 puan)

Şu teoremi ispatlayınız: Bir $\psi(x)$ fonksiyonunu ve bunun Fourier dönüşümü $\phi(k)$ aynı normalleşmeye sahiptir, yani

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 dk .$$

2. **Bir kare dalga paketinin Fourier dönüşümü** (20 puan)

Fourier dönüşümünü

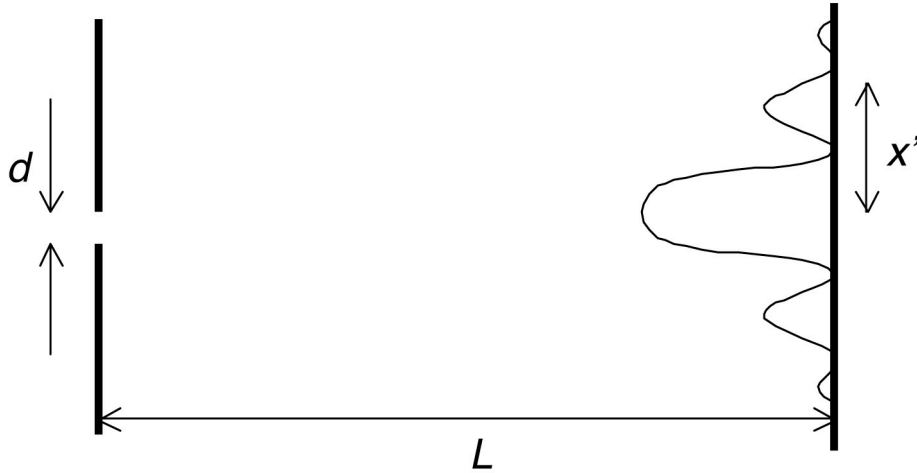
$$\phi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx$$

kare dalga paketi

$$\psi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} & -d/2 \leq x \leq d/2 \\ 0 & \text{başka yerde} \end{cases}$$

için hesaplayınız. $\psi(x)$ ve $\phi(k)$ 'in nitelikli grafiklerini çiziniz. Herbir fonksiyonun yaklaşık "genişliği" nedir? ($\phi(k)$ için, ilk ve ikinci sıfırlar arasındaki aralık, uygun bir aralık gibi tanımlanabilir.)

3. **Yarıktan ve kırınım deseninden ileri gelen momentum dağılımı.** (30puan)



Kare dalga paketi

$$\psi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{d}} \exp(ik_0 y) & -d/2 \leq x \leq d/2 \\ 0 & \text{başka yerde} \end{cases}$$

nin parçacığın tam yarıktan geçtiği andaki dalga fonksiyonunu betimlediğini kabul ediniz. Bu dalga fonksiyonu x-yönünde yerleşik, kesin belirlenmiş y-momentum bileşenli bir parçacığı betimler. Parçacığın momentumunun yarıktan geçtikten sonraki değerinin, tam yarık içindekiyle aynı olduğunu yani, parçacık ekrana çarpana dek korunduğunu kabul ediniz.

MASSACHUSETTS TEKNOLOJİ ENSTİTÜSÜ

Bahar 2006
Ödev No.2

Fizik 8.04

Vuletic
Sayfa 2(2)

23 Şubat Perşembe, saat 16.00'da teslim edilecek

Fourier dönüşümü ve parçacığın x-yönünde belli bir momentum değerine sahip olma olasılığı arasındaki bağıntıyı kullanarak, yarıktan çok uzakta $L \gg d, x$ konulmuş bir ekran üzerinde x gibi bir konumda parçacığı gözleme olasılığı $I(x')$ 'nü hesaplayınız. Bunun bir kırınım analizinden elde edilecek sonucu tekrar vereceğini gösteriniz.

$$I(x') = C \left(\frac{\sin(Ax')}{Ax'} \right)^2$$

Burada $A = \pi d / (\lambda L)$ olup, C ise bir normalleştirme sabitidir.

4. Makroskopik nesnelerin deBroglie dalga boyu (10 puan)

25 mil/saat hızıyla hareket eden (2000 kg)'lık bir otomobilin deBroglie dalga boyu nedir? 1µm yarıçaplı ve 200 kg/m³ yoğunluklu bir toz parçası, oda sıcaklığında (T = 300K) hava molekülleri tarafından itilip kakılmıştır? Bir ⁸⁷Rb atomu ise T = 100 µK'lik bir sıcaklık derecesine kadar lazerle soğutulmuştur? Parçacığın kinetik enerjisinin (3/2) k_BT ile verildiğini kabul ediniz.

5. Boşlukta Gauss dalga paketi (30 puan)

m kütleli bir dalga fonksiyonunun başlangıç dalga fonksiyonu olup burada dalga paketinin genişliği w_0 bir gerçel, pozitif sabittir.

$$\psi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} w_0^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4w_0^2}},$$

a) (15 puan) $\psi(x, t)$ 'in Fourier dönüşümünü hesaplayınız, onunda bir Gauss dalga paketi olduğunu gösteriniz.

$$\phi(k) = \frac{1}{(2\pi)^{1/4} k_0^{1/2}} e^{-\frac{k^2}{4k_0^2}}.$$

Momentum uzayında dalga paketinin k_0 genişliğini tayin ediniz.

(İpucu: Aşağıdaki Gauss integral bağlantısını kullanarak integral işlemini üsteki kareyi tamamlamalısınız.)

b) (15 puan) $\Delta x = w_0$ ve $\Delta k = k_0$ kabul ederek (bunu daha sonraki bir problem takımında ispatlayacaksınız.) Gauss dalga paketinin Heisenberg belirsizlik ilkesinin alt sınırı ile verilen bir belirsizlik çarpımına sahip olduğunu gösteriniz.

Aşağıdaki bağıntı Gauss integralini hesaplamakta kullanışlıdır.

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha(x-\beta)^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad \text{Re}(\alpha) > 0 \text{ olmak üzere herhangi bir kompleks } \alpha, \beta \text{ için}$$