18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 6. SIFIRIMSI FONKSIYONLAR

Şimdiye kadar yapılanlardan kanıtların yapılarına alışmışsınızdır umarım - yine de herşey apaçık oluncaya kadar devam etmek istiyorum.

Gerçel sayılar üzerindeki Lebesgue integrallenebilir fonksiyonların tanımını, bunların $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ vektör uzayını meydana getirdiklerini ve gerçel sayıların ölçümü sıfır olan bir E altkümesinin ne anlama geldiğinin tanımlarını anımsamanızı istiyorum. Yapacağımız ilk iş $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ normunun anlamlı olduğudur.

Önerme 9. Eğer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve eğer f_n dizisi f fonksiyonuna hemen heryerde yakınsayan mutlak toplanabilir basamak fonksiyonlarının bir dizisi ise

$$\int |f| = lim_{N\to\infty} \int |\sum_{k=1}^{N} f_k| \tag{6.1}$$

Dolayısıyla Lebesgue integrali tanımında 'yok etme' bulunmamaktadır. Integralin yok etme yi kullanan genişletimleri vardır, hatta bunları biz de görebiliriz.

Kanıt. Eğer $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise,tanım gereğince, f toplanabilir basamak fonksiyonlarının dizisi f_n fonksiyonlarının, mutlak yakınsamanın gerçekleştiği küme üzerindeki, limitidir. Yapmamız gereken $|f|$ fonksiyonu için de böylesi bir dizi bulmaktır. Buradaki fikir aşikar olanı kullanmaktır. Şimdi

$$\text{eğer} \quad \sum_{j=1} |f_j(x)| < \infty \quad \text{ise} \quad \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \to f(x) \tag{6.2}$$

olduğundan, eğer

$$g_1(x) = |f_1(x)|, g_k(x) = |\sum_{j=1}^{k} f_j(x)| - |\sum_{j=1}^{k-1} f_j(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R} \tag{6.3}$$

denirse, buradan,

$$\text{eğer} \quad \sum_{j} |f_j(x)| < \infty \quad \text{ise} \quad \sum_{k=1}^{N} g_k(x) = |\sum_{j=1}^{N} f_j(x)| \to |f(x)| \tag{6.4}$$

elde ederiz. İlk göstermemiz gereken şey (g_j) dizisinin de mutlak toplanabilir basamak fonksiyonları dizisi olduğudur.

Bunun için üçgen eşitsizliğinin $||v|-|w|| \le |v-w|$ biçimini kullanarak, $k > 1$ sayıları için

$$(6.5) \quad |g_k(x)| = ||\sum_{j=1}^{k} f_j(x)| - |\sum_{j=1}^{k-1} f_j(x)|| \le |f_k(x)|$$

Böylelikle

$$(6.6) \qquad \sum_k \int |g_k(x)| \le \sum_k \int |f_k(x)| < \infty$$

buluruz. Dolayısı ile g_k dizisi gerçekten mutlak toplanabilir bir dizidir. İnşa yönteminden

$$(6.7) \quad \text{eğer} \sum_n |f_n(x)| < \infty \quad \text{ise} \sum_{j=1}^{N} g_k(x) = |\sum_{j=1}^{N} f_j(x)| \to |f(x)|$$

olarak tanımlarız. Bu tam olarak elde etmek istediğimiz ise de $\sum |g_k(x)| < \infty$ sağlandığı küme, yakınsamanın gerçekleştiği kümeden daha büyük olabilir. Notlarınızda bu sorunu çözecek bir sonuç olsa da elimizdeki seriyi daha yavaş yakınsatmak için 'noktasız' altseri' ekleyebiliriz. Başka bir deyişle g_k dizisini

$$(6.8) \quad h_n(x) = \begin{cases} g_k(x) & n = 3k-2 \\ f_k(x) & n = 3k-1 \\ -f_k(x) & n = 3k \end{cases}$$

ile değiştiririz. Bu serinin mutlak yakınsaması için gerekli ve yeter koşul hem $|g_k(x)|$, hem de $|f_k(x)|$ serilerinin yakınsamasıdır-ikinci serinin yakınsaması ilk serinin yakınsamasını gerektirir, yani

$$(6.9) \quad \sum_n |h_n(x)| < \infty \Leftrightarrow \sum_k |f_k(x)|$$

Diğer yandan bu gerçekleştiğinde

$$(6.10) \quad \sum_n h_n(x) = |f(x)|$$

Zira her kısmi toplam ya g_k lar için bir toplam veya $g_k + f_n(x)$ şeklinde bir toplamdır. $f_n(x) \to 0$ olduğundan, serinin mutlak yakınsadığı durumlarda (6.10) geçerli olur ve gerçekten $|f| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ sağlanır. $\square$

Şimdi ele alacağımız husus normun ne zaman sıfır olduğudur. Yani ne zaman $\int |f| = 0$ vardır? Bu sorunu bir yönü oldukca kolaydır. İstenilen sonuç şudur:

Önerme 10. $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ gibi integrallenebilir bir f fonksiyonunun integralinin $\int |f|$ sıfır olması , f in sıfırımsı olmasını, başka bir deyişle, ölçümü sıfır olan E kümesinin tümleyeninde, yani

$$(6.11) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus E, \quad f(x) = 0$$

olmasını gerektirir. Tersine, eğer (6.11) doğru ise, $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve $\int |f| = 0$ sağlanır.

Kanıt. Kanıtın ana kısmı $\int |f| = 0$ ise f nin sıfırımsı bir fonksiyon olduğunun ileri sürüldüğü ilk kısımdır. Bunu bir sonraki önermeyi kullanarak yapacağız. Bunun tersi işin kolay olduğu yöndür.

Gerçekten f (6.11) sağlayan sıfırımsı bir fonksiyon ise, bir kümenin ölçümünün sıfır olması tanımı gereğince, mutlak toplanabilir basamak fonksiyonlar serisi f_n için

$$(6.12) \quad E \subset \{x \in \mathbb{R} : \sum_n |f_n(x)| = \infty\}$$

var olmalıdır. Buradaki mutlak serinin E den daha büyük bir kümede ıraksaması olasıdır. Yinede, aşağıdaki alterne seriyi düşünürsek;

$$(6.13) \qquad g_n(x) = \begin{cases} f_k(x) & n = 2k-1 \\ -f_k(x) & n = 2k \end{cases}$$

Buradan $\sum_n |f_n(x)| < \infty$ gerçekleştiği zaman

$$(6.14) \quad \sum_n g_n(x) = 0$$

buluruz. Gerçekten (6.12) nedeni ile

$$(6.15) \quad \sum_n |g_n(x) < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_n g_n(x) = 0$$

elde ederiz. Böylelikle, sıfırımsı $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve dolayısı ile $|f| \in L^1(\mathbb{R})$ sağlanacağı gibi (6.12) dan

$$(6.16) \quad \int |f| = \sum_k \int g_k = lim_k \int f_k = 0$$

buluruz ki buradaki son ifade mutlak toplanabilirliğin sonucudur.□

Ters yöndeki kanıt için aşağıdaki sonuçu kullanacağız. Bu sonuç $L^1(\mathbb{R})$ uzayının tamlığı ile de ilgilidir.

Önerme 11.Eğer $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ içinde $\sum_n \int |f_n| < \infty$ anlamında mutlak toplanabilir bir seri ise,

$$(6.17) \quad E = \{x \in \mathbb{R} : \sum_n |f_n(x)| = \infty\}$$

kümesinin ölçümü sıfırdır. Eğer $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ve

$$(6.18) \quad f(x) = \sum f_n(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}/E$$

ise $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ve

$$(6.19) \int f = \sum_n \int f_n$$

sağlanır. Bu önerme esas olarak tanımdaki 'basamak fonksiyonları' yerine 'integrallenebilir' fonksiyonların alınabileceğini ve aynı sonuça varılabilineceğini söylemektedir. Kuşkusuz ilk tanım olmaksızın bunların bir anlamı yoktur.

Kanıt. Buradaki fikirler bir normlu uzayın tamlanışının tam olması ile ilgili ve Alıştırma 2 deki bir probleme benzemektedir. Buradaki biraz daha somuttur.

Varsayım gereği her n için $f_n \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğundan her n için öyle mutlak toplanabilir basamak fonksiyonları $f_{n,j}$ vardırki bunlar

$$(6.20) \quad \sum_j |f_{n,j}| < \infty \Rightarrow f_n(x) = \sum_j f_{n,j}(x)$$

sağlarlar. Genelde $f(x)$ fonksiyonunun $f_{n,j}$ fonksiyonlarının hem n, hem de j üstünden ,toplamı olduğunu beklersek te bu çift toplamlı seriler mutlak toplanabilir olmayabilirler. Ancak bunları öyle kılabiliriz. Her n için N_n,

$$(6.21) \quad \sum_{j>Nn} \int |f_{n,j}| < 2^{-n}$$

sağlanacak biçimde seçilirse- bu mutlak toplanabilirlik varsayıldığından mümkündür- dolayısı ile serinin kuyruğu küçüktür. Bunu yaptıktan sonra $f_{n,j}$ serisini aşağıdaki gibi seçerek,

$$(6.22) \quad f'_{n,1} = \sum_{j \le N_n} f_{n,j}(x), \; f'_{n,j} = f_{n,N_n+k-1}(x) \quad \forall j \ge 2$$

Bu hala (6.20) deki aynı küme üzerinde f_n fonksiyonuna yakınsayacaktır. Böylece $f_{n,j}$ fonksiyonlarını $f'_{n,j}$ ile değiştirerek ,

$$(6.23) \sum_j \int |f'_{n,j}| \leq \int |f_n| + 2^{-n+1} \quad \forall n$$

bağıntılarını elde ederiz. Bu üçgen eşitsizliğinden elde edilir, (6.21) kullanılarak

$$(6.24) \qquad \int |f'_{n,1} + \sum_{k=1}^{N} f'_{n,j}| \geq \int |f'_{n,1}| - \sum_{j \geq 2} \int |f'_{n,j}| \geq \int |f'_{n,1}| - 2^{-n}$$

ve sol taraf (6.1) gereğince $N \to \infty$ iken $\int |f_n|$ yakınsar.(6.21) bir kez daha kullanarak (6.23) elde edilir.

$f'_{n,j}$ gösteriliminde, üssü işaretini atıp yeni seride $f_{n,j}$ ifadesini kullanarak ve

$$(6.25) \quad g_k(x) = \sum_{n+j=k} f_{n,j}$$

tanımını yaparsak, mutlak toplanabilir yeni bir basamak fonksiyonları dizisi elde ederiz, çünkü

$$(6.26) \quad \sum_{k=1}^{N} \int |g_k| \leq \sum_{n,j} \int |f_{n,j}| \leq \sum_n (\int |f_n| + 2^{-n+1}) < \infty$$

Şimdi, mutlak yakınsak olan bu diziyi yeni baştan düzenliyerek

$$(6.27) \quad \sum_{n,j} |f_{n,j}(x)| < \infty \Rightarrow f(x) = \sum_k |g_k(x)| = \sum_n \sum_j f_{n,j}(x)$$

elde edilir. Gecen derste öğrendiklerimizi kullanarak, sol taraftaki kümenin ölçümü sıfır olan bir E kümesi için $\mathbb{R} \setminus E$ biçiminde olduğuna hükmederiz. E, kümesi üzerlerinde $\sum_j |f_{n,j}(x)| = \infty$ sağlanan E_n kümelerinin birleşimidir.

Şimdi, mutlak yakınsayan ancak en azından E üzerinde mutlak yakınsayamayan basamak fonksiyonları h_k alır ve birbirlerini izleyen g_k ler arasına daha önce olduğu gibi h_k ve $-h_k$ yerleştirelim. Bu yeni seri (6.27) nedeni ile hala f fonksiyonuna yakınsayacaktır. Bu da (6.17)yı verdiği gibi $f \in L^1(\mathbb{R})$ verecektir. (6.19) daki son sonuc ise integraldeki mutlak yakınsayan çifte serinin yeniden düzenlenmesi ile elde edilir.□

Şimdilik tüm bunların içinde (6.17) deki sonuça gereksinimimiz var. Bu ise integrallenebilir fonksiyonların herhangi mutlak toplanabilir bir serisinin, ölçümü sıfır olan bir küme dışında noktasal olarak mutlak yakınsadığını söylerbaşka bir deyişle sadece ölçümü sıfır olan bir küme üzerinde ıraksama vardır. Biraz şaşırtıcı da olsa bu bize (10) da geri kalanları kanıtlamamızı sağlar. Yani, eğer $f \in L^1(\mathbb{R})$ ve $\int |f| = 0$ ise, Önerme 11 i, her terimi $|f|$ olan seriye uygulayalım. Tüm integraller sıfır olduğundan bu seri mutlak toplanabilirdir. Dolayısı ile ölçümü sıfır olan bir küme dışında noktasal olarak yakınsamalıdır. $f(x) \neq 0$ zaman ise ıraksayacaktır, dolayısı ile;

$$\int |f| = 0 \Rightarrow \{x : f(x) \neq 0\} \tag{6.28}$$

kümesinin ölçümü sıfırdır ki, bu tamda bizim göstermek istediğimiz şeydir.

Son olarak, yaptıklarımız bize alışılagelmiş Lebesgue uzayını tanımlamamıza olanak tanır;

$$f \in L^1(\mathbb{R}) = f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})/\mathcal{N} \tag{6.29}$$

ki burada $\mathcal{N}$ sıfırımsı fonksiyonlardır.$\int |f|$ bu uzay üzerinde bir normdur.

PROBLEMLER 3

Alıştırmalarda Lebesgue integral ile ilgili kimi özellikleri kanıtlamanız ve buna ek olarak ta kimi soyut kanıtları yapmanız istenecektir. Bir eşitliğin hemen heryerde (h.h.y) olması onun ölçümü sıfır olan bir kümenin dışında gecerli olması anlamına gelmektedir.

Problem 3.1 Eğer f ve g, $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ içinde , yani gerçel sayılar üzerinde Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlarsa aşağıdakileri gösteriniz.

(1) Eğer h.h.y. $f(x) \geq 0$ ise $\int f \geq 0$ dır.

(2) Eğer h.h.y. $f(x) \leq g(x)$ ise $\int f \leq \int g$ dır.

(3) Eğer f kompleks değerli bir fonksiyon ise gerçel kısmı Ref Lebesgue ölçülebilirdir ve

$$|\int Ref| \leq \int |f|$$

(4) Genel kompleks değerli bir fonksiyon için

$$(6.30) \quad |\int f| \leq \int |f|$$

gösteriniz.(İp ucu: Kaynaklara bakabilirsiniz ama genellikle yapılan şey $\theta \in [0, 2\pi]$ almak ve $e^{i\theta} \int f = \int (e^{i\theta} f) \geq 0$ seçerek, önceki eşitsizliği $g = e^{i\theta} f$ de kullanmaktır.

(5) İntegral

$$(6.31) \quad \int : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$$

sürekli ve doğrusaldır.

Problem 3.2 I gerçel sayıların $(-\infty, a)$ veya (a, ∞) olasılıkların da dışlanmadığı bir aralığı ise bir $f : I \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilirliği

$$(6.32) \quad \vec{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \vec{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilirliği olarak tanımlanır. Buradan f fonksiyonunun I üzerindeki integrali

$$(6.33) \int_I f = \int \vec{f}$$

olarak tanımlanır.

(1) I üzerinde böylesi integrallenebilir fonksiyonların bir vektör uzayı olduğunu gösteriniz. Bu uzay $\mathcal{L}^1(I)$ ile gösterilecektir.

(2) f fonksiyonu I üzerinde integrallebilir ise $|f|$ fonksiyonun da integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

(3) Eğer f, I üzerinde integrallenebilir ve $\int |f| = 0$ ise h.h.y $f = 0$ gösteriniz. Yani, gerçel sayıların ölçümü sıfır olan $E \subset I$ kümesi için, $\forall x \in I \setminus E$ $f(x) = 0$ gösteriniz.

(4) Bir önceki soruda yer alan ve $\mathcal{N}(I)$ ile göstereceğimiz sıfırımsı foksiyonların vektör uzayı olduğunu gösteriniz.

(5) $\int_I |f|$ ifadesinin $\mathcal{L}^1(I)/\mathcal{N}$ üzerinde norm olduğunu gösteriniz.

(6) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise

$$(6.34) \quad g : I \to \mathbb{C}, \quad g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in I \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus I \end{cases}$$

ile tanımlanan g fonksiyonunun I üzerinde integrallebililiğini gösteriniz.

(7) Yukarıdaki kısıtlama dönüşümünün

$$(6.35) \quad L^1(\mathbb{R}) \to L^1(I)$$

örten ve sürekli olduğunu gösteriniz. (Dikkat: Her iki uzayda integrallenebilir fonksiyonların hemen heryerde eşitlik ile alınmış bölüm uzaylarıdır.)

Problem 3.3 Bir önceki 3.2 nin devamıdır:

(1) $I = [a, b)$ ve $f \in L^1(I)$ ise f fonksiyonunun $I_x = [x, b)$ aralığına kısıtlamasının , her $a \leq x < b$ için $L^1(I_x)$ uzayının öğesi olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(6.36) \quad F(x) = \int_{I_x} f : [a, b) \to \mathbb{C}$$

fonksiyonunun sürekliliğini gösteriniz.

(3) $x^{-1}cos(\frac{1}{x})$ fonksiyonunun $(0, 1]$ aralığı üzerinde Lebesgue integrallenebilir olmadığını gösteriniz. İp ucu: yukarıda ne gösterdiğimizi biraz düşününüz.

Problem 3.4 (Biraz daha zor ancak yapılabilir!) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olsun.

(1) Her $t \in \mathbb{R}$ için , kaydırmalar

$$(6.37) \quad f_t(x) = f(x - t) : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

lerin de $L^1(\mathbb{R})$ içinde olduğunu gösteriniz.

(2)

$$(6.38) \quad lim_{t \to 0} \int |f_t - f| = 0$$

olduğunu gösteriniz.Bu integrallenebilir fonksiyonların ortalama yakınsaması olarak betimlenir.

(3) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ için

$$(6.39) \quad t \to [f_t] \in L^1(\mathbb{R})$$

fonksiyonunun sürekli olduğunu gösteriniz.

Problem 3.5 Problemler 2'de kompakt bir aralıkta sürekli fonksiyonun, aralık dışına sıfır olarak genişletildiğinde Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon elde edildiğini gördük. Bunu ve basamak fonksiyonlarının $L^1(\mathbb{R})$ de yoğun olduklarını kullanarak bir kompakt aralık dışında sıfır olan $\mathbb{R}$ üzerindeki sürekli fonksiyonların $L^1(\mathbb{R})$ içinde yoğun olduğunu gösteriniz.

Problem 3.6 (1) Eğer $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sınırlı, sürekli ve $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ ise $gf \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ olduğunu ve

$$(6.40) \qquad \int |gf| \leq sup_{\mathbb{R}}|g|. \int |f|$$

gösteriniz.

(2) Şimdi $C(K)$ bir kompakt metrik uzayı üzerinde sürekli fonksiyonları göstermek üzere $G \in C([0,1]\times[0,1])$ alalım. Artık $L^1[0,1]$ uzayını tanıdığımıza göre ilk kısmı kullanarak $f \in L^1[0,1]$ ise

$$(6.41) \quad F(x) = \int_{[0,1]} G(x,.)f(.) \in \mathbb{C}$$

ifadesinin [0,1] deki her x için iyi tanımlı olduğunu gösteriniz. Burada . gösterilimi her $x \in [0,1]$ için iyi tanımlı olan ve integralin alındığı değişkeni göstermektedir.

(3) Her $f \in L^1[0,1]$ için F fonksiyonunun [0,1] üzerinde sürekli olduğunu gösteriniz.

(4)

$$(6.42) \quad L^1([0,1]) \to C([0,1]) \quad f \to F$$

dönüşümünün $L^1[0,1]$ uzayından $C[0,1]$ Banach uzayına sınırlı (sürekli) olduğunu gösteriniz. Sürekli fonksiyonlar üzerinde sup normunu alınız.

PROBLEM 2'NİN ÇÖZÜMLERİ

Problem 2.1 Derste inşa ettiğimiz B uzayının tamlığını gösteriniz.

Çözüm. Normlu V uzayı ile başlayalım. Bu uzaydan $V^{\sim}$ ile göstereceğimiz ve V deki mutlak toplanabilir serilerden oluşan yeni bir vektör uzayı elde edeceğiz. Sonra da $V^{\sim}$ uzayında, S ile gösterilen ve V içinde sıfıra yakınsayan serileri ele alacağız. Burada

$$(6.43) \quad B = V^{\sim}/S$$

bölüm uzayı ile ilgileniyoruz. Bu uzayın normlu bir uzay olduğunu ve (v_n), V uzayında mutlak toplanabilir bir seri olmak üzere, $b = (v_n) + S$ gibi bir öğesinin normunun ise;

$$(6.44) \quad ||b|| = lim_{N\to\infty}||\sum_{n=1}^{N} v_n||_V$$

verildiğini biliyoruz. Bu tanımın, b öğesini temsil eden serilerden bağımsız olduğunu, yani, S den alınıp eklenecek her öğe için aynı olacağını da biliyoruz.

B uzayında mutlak toplanabilir serileri biraz daha iyi anlamak adına, böylesi bir seri (b_n) alalım. Bilinen

$$(6.45) \quad \sum_n ||b_n|| < \infty$$

olduğudur. Bu serinin B uzayında yakınsadığını gösterelim. İlk ödevimiz limitinin ne olduğunu kestirebilmek. Her b_n, V uzayında mutlak toplanabilir olan $v_k^{(n)}$ serisidir. Şimdi bu serilerin köşegenlerinden, yeni bir seri tanımlayalım;

$$(6.46) \quad w_j = \sum_{n+k=j} v_k^{(n)}.$$

Buradaki sorun tanımlanan serinin her zaman V uzayında mutlak toplanabilir bir seri olmayabileceğidir. Hesaplamak istenilen;

$$(6.47) \quad \sum_j ||w_j|| = \sum_j ||\sum_{n+k=j} v_k^{(n)}|| < \infty.$$

Bunu hesaplamanın tek yolu üçgen eşitsizliğini kullanmak ve

$$(6.48) \quad \sum_{j=1}^{\infty} ||w_j|| = \sum_{k,n} ||v_k^{(n)}||_V$$

hükmetmektir. Sağ tarafta k üzerinden alınan toplamlar sonlu olmalarına karşın bunların toplamlarının sonlu olup olmadıklarını bilmiyoruz. Şimdi akla gelen ilk şey ile yola çıkarak, b_n ni temsil eden ve mutlak toplanabilir $v_k^{(n)}$ serisini

$$(6.49) \quad \sum_k ||v_k^{(n)}|| \leq ||b_n||_B + 2^{-n}$$

sağlayacak biçimde seçelim. Önce b_n temsil eden mutlak toplanabilir bir seri olarak u_k seçelim- yani-

$$||b_n|| = lim_{N\to\infty}||\sum_{k=1}^{N} u_k|| \quad ve \quad \sum_k ||u_k|| < \infty$$

sağlansın. M sayısını yeterince büyük seçerek,

$$(6.50) \quad \sum_{k>M} ||u_k||_V \leq 2^{-n-1}$$

kabul edebiliriz. M 'in bu seçimi ile $v_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{M} u_k$ ve $v_k^{(n)} = u_{M+k-1}, \forall k \geq 2$ alalım. Bu seri hala (b_n) için bir temsildir, çünkü aşağıdaki toplamların farkı, her N için;

$$(6.51) \quad \sum_{k=1}^{N} v_k^{(n)} - \sum_{k=1}^{N} u_k = -\sum_{k=N}^{N+M-1} u_k$$

olur. Sağ taraftaki limit, sadece sonlu terim içerdiğinden, sıfıra yakınsar.(6.50) den ötürü,

$$(6.52) \sum_k ||v_k^{(n)}||_V = ||\sum_{j=1}^{M} u_j||_V + \sum_{k>M} ||u_k|| \leq ||\sum_{j=1}^{N} u_j|| + 2\sum_{k>M} ||u_k||$$

$$\leq ||\sum_{j=1}^{N} u_j|| + 2^{-n}$$

N sonsuza giderken alınan limit (6.49) verir.

Her b_n için yukarıdaki özellikleri sağlayan temsilciler seçilip w_j ler (6.46) sağlayacak biçimde seçildiklerinde, (6.47) bize, b_n mutlak toplanabilir olduğundan,

$$(6.53) \quad \sum_j ||w_j||_V \leq \sum_n ||b_n||_B + \sum_n 2^{-n} < \infty$$

verir. Dolayısı ile $(w_j) \in V^{\sim}$ verirki, bu da $b \in B$ demektir.
Son olarak $\sum_n b_n = b$ göstermek istiyoruz. Bu ise

$$(6.54) \quad lim_{N\to\infty}||b - \sum_{n=1}^{N} b_n|| = 0$$

göstermemizi gerektirir. Hatırlamamız gereken buradaki normun kendisin de bir limit olduğudur-$b - \sum_{n=1}^{N} b_n$ ifadesi n-inci terimi

$$(6.55) \quad w_k - \sum_{n=1}^{N} v_k^{(n)}$$

olan toplanabilir seridir. Normu da

$$(6.56) \quad lim_{p\to\infty}||\sum_{k=1}^{p}(w_k - \sum_{n=1}^{N} v_k^{(n)})||_V$$

ile verilir. Burada anlamamız gereken $N \to \infty$ iken ne olduğudur! Tanımdan, w_k'lar $v_j^{(n)}$ lerin köşegen üzerinden alınan toplamıdır. Bu nedele, k üzerinden alınan toplam $v_j^{(n)}$ lerin köşegensel olmayan ilk p tanesinin toplamı ile uzunluğu N , yüksekliği p olan dörtgen üzerinden alınan toplamın farkı kadardır. Dolayısı ile üçgen eşitsizliğinden farkın normunu, normların ' kullanılmayan terimler üzerinden alınan toplamlar ile hesaplıyabiliriz. Buradan $L = min(p, N)$ olmak üzere

$$(6.57) \quad || \sum_{k=1}^{p}(w_k - \sum_{n=1}^{N} v_k^{(n)})||_V \leq \sum_{l+m\geq L} ||v_l^{(m)}||_V$$

buluruz. Bu toplam sonludur. $p \to \infty$ iken bunu $l + m \geq N$ olan toplamla değiştirebiliriz. Şimdi, $N \to \infty$ iken, (çifte serinin) mutlak toplanabilirliğinden sıfıra yakınsar. Dolayısı ile;

$$(6.58) \quad lim_{N\to\infty}||b - \sum_{n=1}^{N} b_n||_B = 0$$

ederiz ve bu tam da istediğimiz, $\sum_n b_n = b$ dir.

Problem 2.2 Şimdi basamak fonksiyonlarının mutlak toplanabilir bir seri örneğini düşünelim. Soldan kapalı, sağdan açık $[0, 1)$ aralığını ele alalım. Alışılagelmiş Cantor kümesi inşasının biraz değişik hali olan aşağıdaki inşa'yı düşünelim. Ortadaki merkezi aralık $[1/3, 2/3)$ çıkarıp, geriye kalan $C_1 =$

$[0,1/3) \cup [2/3,1)$ kümesinden yine merkezi aralıkları çıkartarak geriye kalan $C_2 = [0,1/9) \cup [2/9,1/3) \cup [2/3,7/9) \cup [8/9,1)$ kümesini ve bu şekilde devam ederek her biri yarı-açık, yarı-kapalı aralıkların sonlu birleşimleri olan $C_k \subset C_{k-1}$ kümelerini düşünelim. Şimdi herbiri C_k kümelerinin karakteristik fonksiyonu olan f_k fonksiyonlarından oluşan seriyi ele alalım.

(1) Bu seri mutlak toplanabilir bir seridir.

(2) $[0,1)$ deki hangi x öğeleri için $\sum_k |f_k(x)|$ serisi yakınsar?

(3) Yukarıdaki seri ile tanımlanan $[0,1)$ üzerinde tanımlı hangi fonksiyon Lebesgue integrallenebilirdir? İntegralini hesaplayınız.

(4) Bu fonksiyon Riemann integrallenebilir midir?

(5) Yukarıdaki inşa sırasında atılan aralıkların birleşimlerinde bir, dışında sıfır olan fonksiyon g olsun. g fonksiyonunun Lebesgue integrallenebilir olduğunu ve integralini hesaplayınız.

Çözüm . (1) Her seferinde aralıkların toplam boyu $1/3$ oranında azalmaktadır. Bu nedenle $l(C_k) = 2^k/3^k$ dır. Buradan, f fonksiyonunun negatif olmayan integrali

$$\int f_k = 2^k/3^k \Rightarrow \sum_k \int |f_k| = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k/3^k = 2 \tag{6.59}$$

bulunur ve seri mutlak toplanabilirdir.

(2) C_k azalan bir kümeler dizisi olduğundan, sadece

$$x \in E = \bigcap_k C_k \tag{6.60}$$

için $\sum_k |f_k(x)|$ serisi ıraksak, diğer durumlar için yakınsaktır.

(3) Serinin yakınsadığı yerlerde, serinin toplamı, diğer durumlarda 0 olarak tanımlanan

$$f(x) = \begin{cases} \sum_k f_k(x), x \in \mathbb{R} \setminus E \\ 0, x \in E \end{cases} \tag{6.61}$$

fonksiyon, tanımdan,integrallenebilirdir. Integrali ise, yine tanımdan,

$$\int f = \sum_k \int f_k = 2 \tag{6.62}$$

(4) f fonksiyonu sınırlı olmadığından, tanım gereği, Riemann integrallenebilir değildir. Özellikle, boş olmayan $C_k \setminus C_{k+1}$ kümesindeki bir x için $f(x) = k$ olur.

(5) F ile gösterilen ve çıkarılan kümelerin birleşimi olan küme $[0,1)\setminus E$ dir. Çıkarılan kümelerin herbirinde 1 olan basamak fonksiyonları mutlak toplanabilir bir seri verir. Bu fonksiyonlar negatif değildirler ve $k = 1, 2, ...$ için k-incin integrali $1/3 \times (2/3)^{k-1}$dir. Bu seri, F kümesi üzerinde g fonksiyonuna yakınsar. Dolayısıyla g Lebesgue integrallenebilirdir ve integrali

$$\int g = 1 \tag{6.63}$$

dir.

Problem 2.3 $\mathbb{R}^2$ için örtme önteoremi. Bir dikdörtgen ile kastedilen küme $\mathbb{R}^2$ de $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ biçiminde olan bir kümedir.

Böylesi bir dikdörtgenin alanı $(b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$ olarak tanımlıdır.

(1) Bir dikdörtgeni tanımlayan aralıkları aralıklara bölerek dikdörtgeni de altdikdörtgenlere bölmüş oluruz. Böylesi bir bölünme ile elde edilen dikdörtgenlerin alanlarının toplamının ilk dikdörtgenin alanına eşit olduğunu gösteriniz.

(2) Yarı-açık-kapalı anlamında sonlu tane keşişmeyen dikdörtgenin birleşimi de bir dikdörtgen ise alanların toplamının, birleşimin alanına eşit olduğunu gösteriniz.(ip ucu: altaralıklara bölerek ilerleyiniz).

(3) Bir dikdörtgen içinde olan, sayılabilir çoklukta, keşişmeyen dikdörtgenlerin alanlarının toplamının büyük dikdörtgenin alanından küçük veya eşit olduğunu gösteriniz.

(4) Sonlu sayıda dikdörtgenin birleşimi verilen bir dikdörtgeni içeriyorsa, dikdörtgenlerin alanlarının toplamının en az birleşimlerini içeren dikdörtgenin alanı kadar olduğunu gösteriniz.

(5) Bir önceki alıştırmayı sayılabilir çokluktaki dikdörtgenlere genişletiniz.

Çözüm. (1) Bir dikdörtgen için bu oldukça açıktır.Çünkü sadece bir iç nokta c için ya ilk aralığı ya da ikincisini iki altaralığa bölebiliriz. Bölündükten sonra iki dikdörtgenin alanları ya

$$(c - a_1)(b_2 - a_2) + (b_1 - c)(b_2 - a_2) = (b_1 - c)(b_2 - a_2) \tag{6.64}$$

veya

$$(b_1 - a_1)(c - a_2) + (b_1 - a_1)(b_2 - c) = (b_1 - c)(b_2 - a_2)$$

olacaktır. Buradan,tümevarımla, bölünmüş dikdörtgenlerin alanlarının toplamının ilk dikdörtgenin alanına eşit olduğuna hükmederiz.

(2)Eğer sonlu tane keşişmeyen dikdörtgenin birleşimi yine,$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ şeklinde bir dikdörtgen ise, bu dikdörtgenlerin herhangi birinin bölünmesi ile elde edilen dikdörtgenlerin birleşimi için de aynı şey doğrudur. Üstelik, böylesi bir bölümme ile elde edilen dikdörtgenlerin alanlarının toplamı da aynı kalır. Şimdi, $C_1 \subseteq [a_1, b_1)$ kümesi böylesi dikdörtgenlerin ilk aralıklarının uç noktalarından oluşan küme olsun. Benzer biçimde, C_2 kümesi de ikinci aralıkta olan dikdörtgenlerin uç noktaların oluşan küme olsun. Dikdörtgenlerin her birini C_1, C_2 kümelerinin uç noktalarını kullanarak sonlu kez bölelim. Böylece elde edilen dikdörtgenlerin toplam alanları değişmeyecektir. $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dikdörtgenini örten dikdörtgenler A_i, $[a_1, b_1)$ aralığını örten ve keşişmeyen aralıklardan, B_j, $[a_2, b_2)$ dikdörtgenini örten ve keşişmeyen aralıklardan olmak üzere, $A_i \times B_j$ biçimindedirler. Sınıfta yapılan bir boyutlu örneğe benzer biçimde ilk aralığı A_i olmak üzere böylesi aralıkların alanlarının toplamı aşağıdaki çarpımdır:

$$(6.65) \quad A_i boyu \times (b_2 - a_2)$$

biçimindedir. Şimdi i üstünden toplam alır ve aynı neticeyi bir kez daha kullanarak aradığımız sonuça varabiliriz.

(3)$[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dikdörtgeninde bulunan sonlu tane keşişmeyen dikdörtgen ailesine aynı bölme işlemini yapabilir ve bu aileye kesişmeyen yeni dikdörtgen ailesi ekleyerek büyük dikdörtgeni örten bir aile bulabiliriz.Burada daha önceki sonuçumuzu kullanarak dikdörtgenlerin alanlarının toplamının $(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$ çarpımından küçük veya eşit olduğuna hükmedebiliriz. Buradan da sayılabilir ve keşişmeyen dikdörtgenler ailesinin alanları toplamının yukarıdaki sabitten küçük veya eşit olduğuna hükmedebiliriz.

(4) $D_i, i = 1, ..., N$ dikdörtgenlerinin birleşimi D dikdörtgenini içersin. D_1 dikdörtgenini D dikdörtgeninin son noktalarını kullanarak alt dikdörtgenlere bölelim. Böylece elde edilen dikdörtgenler ya tamamen D içindedirler veya onu kesmezler.D_1 dikdörtgenini (gerçekte biricik olan)tamamen D içinde kalan dikdörtgenle değiştirelim. Şimdi tümevarım'a başvurarak ilk $N-k$ dikdörtgenin kesişmediğini,ve tümünün D içinde kaldığını ve birleşimlerinin D dikdörtgenini örttüğünü varsayabiliriz. Şimdi, bir sonraki dikdörtgene, D_{N-k+1} dikdörtgenine bakalım. Bu dikdörtgeni daha önceki $D_1, ..., D_k, D$ dikdörtgenlerini belirleyen aralıkların son noktalarını kullanarak alt dikdörtgenlere bölelim. D_{N-k+1} dikdörtgeninin bölünesinden sonra elde edilen dikdörtgenler ya tamamen bir $D_j, j \leq N - k$ içinde kalırlar ya da D içinde değildirler. Bunları atarak k sayısını bir azaltırız(Bunu yaparken belki N artırılmak zorunda kalsak bile bunda bir sakınca yoktur). Başka bir deyişle, tümevarımla, dikdörtgenleri bölerek ve gerekmeyenleri atarak, birbirlerini kesmeyen, D içinde kalan ve birleşimleri D dikdörtgenini örten bir aile elde ederiz. Bu yeni dikdörtgenler ailesinin alanları

toplamı, bir önceki gözlemden, tamtamına D' nin alanına eşittir. Dolayısı ile alanlar toplamı başlangıçta, en az, bu kadardır.

(5) $D = [a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ dikdörtgenini örten, sayılabilir dikdörtgenler, ailesi için bir boyuttaki gibi hareket ederiz. İlk olarak kenarların boylarını üsten sınırlayan bir C sabiti olduğunu kabul edebiliriz. Sonra k-inçi dikdörtgeni biraz daha büyük olacak şekilde, her iki üst limiti de, $\delta > 0$ olmak üzere, $2^{-k}\delta$ kadar büyütürüz. Şimdi alan artmıştır ama bu artış $2C2^{-k}$ dan büyük değildir. Şimdi büyütülen ve sayılabilir kümelerin içlerinden oluşan örtü $[a_1, b_1-\delta]\times[a_2, b_2-\delta]$ kompakt kümesini örtecektir. Kompaktlık gereği örten açık kümelerin sonlu tanesi de yine açık bir örtü olacaktır. Aynı teoremin yarı-açık biçimini kullanarak, aynı son noktaları kullanan ve $[a_1, b_1 - \delta) \times [a_2, b_2 - \delta)$ için bir örtü bulabiliriz. Daha önce elde edilen sonlu haldeki sonuçu kullanarak,

$$(6.66) \quad alanlar \quad toplamı + 2C\delta \geq alanD - 2C\delta$$

bulunur. δ keyfi olduğundan, sonuça ulaşılmıştır.$\square$

Sizleri basmak fonksiyonlarının integrallerini alma konusundaki detayları öğrenmeye teşvik etmek isterim. Şimdi aralıklar yerine dikdörtgenleri kullanarak, yaptığımız her şeyin iki boyuta da yapılabileceğini görmenizi istiyorum. İşin gerçeğine bakarsanız her şey $\mathbb{R}^n$ de de çalışır.

Problem 2.4 (1) $[0, 1]$ üzerindeki her sürekli fonksiyon bir basamak fonksiyonları dizisinin düzgün limitidir.(İp ucu: Önce gerçel durumu düşünün. Aralığı 2^n eşit parçaya bölün ve basamak fonksiyonlarını o altaralık üzerinde sürekli fonksiyonun infimumu olarak tanımlayın. Sonrada düzgün yakınsaklık kullanın.

(2) Calculus'te öğrendiğiniz 'teleskopik seri' hilesini kullanarak $[0, 1)$ üzerindeki her sürekli fonksiyonun f_j fonksiyonları basamak fonksiyonları ve $\forall x \in [0, 1), \quad \sum_j |f_j(x)| < \infty$ olmak üzere

$$(6.67) \quad \sum_i f_i(x), \forall x \in [0, 1)$$

olarak yazılabileceğini kanıtlayınız.

(3) Buradan $[0, 1]$ üzerindeki her sürekli fonksiyonun bu aralığın dışına 0 olacak biçimde genişletildiğinde, Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyon olduğunu kanıtlayınız.

Çözüm.(1) Sürekli bir fonksiyonun gerçel ve sanal kısımları da sürekli olduğundan önce gerçel değerli sürekli fonksiyonlar için kanıt yapar sonra da toplama yaparız. Sürekli fonksiyonların kompakt kümeler üzerindeki düzgün sürekliliklerinden, ki burada küme $[0, 1]$ kümesidir, verilen n sayısı için öyle bir N buluruz ki

$|x-y| \leq 2^{-N}$ için $|f(x)-f(y)| \leq 2^{-N}$ olur. Şimdi N, n bağlı olmak üzere verilen aralığı 2^N eşit parçaya böler ve n nin fonksiyonu olarak azalmayan olmasında ısrarcı olur ve her altaralığın kapanışında basamak fonksiyonu F_n, $minf = inff$ olacak biçimde tanımlanırsa,

$$(6.68) \quad |f(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}, \forall x \in [0,1)$$

ve (6.68) deki eşitsizlik aralıkların son noktalarında da geçerli olur. Dolayısı ile $[0,1)$ kümesi üzerinde düzgün olarak $F_n \to f$ yakınsaması vardır.

(2) $f_1 = F_1$, ve $k > 1$ için $f_k = F_k - F_{k-1}$ tanımlanırsa, bunlar basamak fonksiyonları olacaklar ve

$$(6.69) \quad \sum_{k=1}^{n} F_k = f_n$$

sağlanır. F_{n+1} tanımındaki aralık F_n için de bir altaralık olacaktır.F_n tanımındaki her altaralıkta f'in değeri 2^{-n} den fazla değişemiyeceği için ,

$$(6.70) \quad |f_n(x)| = |F_{n+1}(x) - F_n(x)| \leq 2^{-n}, \forall n > 1$$

bulunur ve buradan da $\int |f_n| \leq 2^{-n}$ elde ederiz. Bu serinin mutlak toplabilir olduğunu verir. Esasında seri $[0,1)$ aralığının her noktasında yakınsaktır ve (6.68) gereğince f fonksiyonuna düzgün yakınsar.

(3) Bu nedenle f Lebesgue integrallenebilir bir fonksiyondur.

(4) Sağ taraftaki integral Riemann integrali olmak üzere

$$(6.71) \quad \int f = \int_o^1 f(x)dx$$

eşitliğini sormamışım. Fakat, bu aşağıdaki

$$(6.72) \quad \int f = lim_n \int F_n$$

eşitliğiden ve basamak fonksiyonlarının $[0,1]$ üzerindeki integralleri değerlerinin o altaralıktaki üst Riemann toplamları ve alt Riemann toplamları arasında kalmasından elde edilir.□