18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 4. LEBESGUE İNTEGRALLENEBİLİRLİK

Basamak fonksiyonları hakkında konuşuldu. Sonra Lebesgue ölçümün temeli olan örtme önteoremi ele alındı. Bu kullanılarak integral yapacağız ve sonrasında basamak fonksiyonların artan dizilerini çalışacağız.

Uygunluk açısından bir aralıktan kastedilen soldan kapalı ve sağdan açık aralık anlaşılacak ve $[a, b)$ ile gösterilecek. Bu aralığın uzunluğu boş küme iken 0 diğer durumda $b - a$ olacak (tabii ki bu kapalı aralık için doğru değil. Böyle bir aralığı iki ayrık aralığa aşağıdaki gibi bölebiliriz:

$$(4.1) \quad [a, b) = [a, t) \cup [t, b), \quad a < t < b.$$

Bir basamak fonksiyonu

$$(4.2) \quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

sonlu aralıkların birleşimleri dışında kalan noktalarda sıfır ve her bir aralık üzerinde sabit olan bir fonksiyondur. Bu durumda $f(\mathbb{R})$ sonludur-yani sadece sonlu sayıda değer alır-ve

$$(4.3) \quad f^{-1}(c) \text{ sonlu sayıda ayrık aralıkların birleşimidir}, \quad c \neq 0.$$

Basamak fonksiyonlarını toplam biçiminde yazmak çoğu zaman yararlı olur:

$$(4.4) \quad f = \sum_{i=1}^{N} c_i \chi_{[a_i, b_i)}$$

yani aralıkların karakteristik fonksiyonlarının sayılarla çarpımının bir toplamıdır. Buradaki temsil yazılımı tek değildir. Ancak aralıklar üzerinde ayrık ve maksimallık ayarlaması yapılarak f'nin aynı uç noktaya sahip iki aralıkta aynı değer almaması sağlanır.

Bir basamak fonksiyonunun bir sabitle çarpımı yine bir basamak fonksiyonu ve iki basamak fonksiyonun toplamı yine bir basamak fonksiyonudur-görüntünün sonlu olduğu açık. Aralıkların farkı $[a, b) \setminus [a', b')$ ve iki aralığın birleşimi her zaman aralıkların bir birleşimidir. Bir basamak fonksiyonun mutlak değeri de bir basamak fonksiyonudur.

Bir f basamak fonksiyonun integrali (4.4) den

$$(4.5) \quad \int_{\mathbb{R}} f = \sum_i c_i (b_i - a_i)$$

olarak tanımlanır ve bu değer, fonksiyonun temsilinden bağımsızdır. Tabii ki iyi tanımlılıkla, bu değer f'nin Riemann integraline eşittir (bunu göstermek basit).

Önerme 1. Yukarıda tanımlanan anlamda $\mathbb{R}$ de tanımlı basamak fonksiyonları

$$\|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f| \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanan norma göre bir normlu uzaydır.

Sürekli fonksiyonlar yerine bu uzayı tamlayacağız (yani tamlanışını bulacağız)-hem daha yaygın hem de daha kolaydır. Direkt bir şekilde Mikusinkski'ye ait olan açık bir tamlanışını oluşturabiliriz. Burada Lebesgue integrallenebilir fonksiyonu tanımlayabiliriz, ancak bu tanım üzerinde biraz çalışmaya ihtiyacımız var.

Tanım 3. Basamak fonksiyonları f_n lerin mutlak toplanabilir dizisi f_n, var ve aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna Lebesgue integrallenebilir denir:

$$\sum_n \int |f_n(x)| \langle \infty \tag{4.7}$$

$$\sum_n |f_n(x)| < \infty \text{ sağlayan her } x \in \mathbb{R} \text{ için } f(x) = \sum_n f_n(x). \tag{4.8}$$

Dolayısıyla bu tanım biraz karışıktır-önce bir mutlak değerlerinin integrallerinin toplamının sonlu olan,yani (4.7) sağlayan bir basamak fonksiyonlar dizisi f_n olmalıdır. $\sum_n |f_n(x)| < \infty$ sağlayan her x,için f fonksiyonunu $f(x) = \sum_n f_n(x)$ olarak verilmelidir. Bu tanımın iyiliği kendine yeter biçimde olması ve prensip olarak "herşeyin" buradan çıkartılabileceğidir.

Öncelikle Örtme önteoremine ihtiyacımız var-temel olarak, basamak fonksiyonların dizisine ya da serilerine baktığımız zaman "aralıkların" sayılabilir topluluğunun özelliklerini anlayabileceğiz. Aşağıda geçen iki durumun dikkatli bir kanıtının verilmesini size bırakıyorum.

Önteorem 1. $C_i = [a_i, b_i)$, $i = 1, ..., N$, aralıkların sonlu bir topluluğu ise

$$C_i \subset [a,b) \quad \forall i \quad \text{ve} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \leq b - a. \tag{4.9}$$

Diğer taraftan

$$[a,b) \subset \bigcup_{i=1}^{N} C_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} (b_i - a_i) \geq b - a. \tag{4.10}$$

Bunu bölme noktaları ekleyerek kanıtlayabilirsiniz.

Aynı şeyi aralıkların sayılabilir toplulukları için de yapabiliriz.

Önerme 2. $C_i = [a_i, b_i)$, $i \in \mathbb{N}$, aralıkların sonlu bir topluluğu ise

$$(4.11) \quad C_i \subset [a,b) \quad \forall i \quad \text{ve} \quad C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i \neq j \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \leq b - a.$$

ya da

$$(4.12) \quad [a,b) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \geq b - a.$$

Kanıt. Önce kanıtın çok açık olduğunu düşünebilirsiniz. (4.9) hipotezi her sonlu altaralıkları için doğru ve böylece sonlu toplam her zaman sabit bir $b-a$ sayısından küçüktür ve dolayısıyla sonsuz toplam-ve buradan da yakınsaklık elde edilir.

Diğer taraftan (4.12) Heine-Borel teoremine bağlı olduğundan kanıtı çok açık değildir. (4.10)'ı uygulayabilmek için $\delta > 0$ verilsin. Her bir aralığın alt limitini $a_i - 2^{-i}\delta$ alt limiti ile değiştirerek genişletebiliriz ve

$$(4.13) \quad [a, b-\delta] \subset [a,b) \subset \bigcup_i (a_i - 2^{-i}\delta, b_i)$$

olacak biçimde açık aralıkları ele alabiliriz. Heine-Borel teoremini kapalı aralıkların kompaktlığına uygulayarak bu açık aralıkların sonlu tanesi $[a, b-\delta)$ aralığını örter. Dolayısıyla (4.10)'in uygulanmasıyla aşağıdaki eşitsizliği sağlayan sonlu bir N vardır.

$$(4.14) \quad \sum_{i=1}^{N}(b_i - a_i) - 2^{-i}\delta \geq b - a - \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \geq b - a - 2\delta$$

Eşitsizlikteki toplam sonsuz olabilir, bu durumda fazlasıyla doğrudur. Bu eşitsizlik her $\delta > 0$ için doğru olduğundan (4.12) elde edilir.

Integrallenebilir fonksiyonların en temel özelliklerinden biri aşağıdaki monotonluk önteoremidir.

Önteorem 2. f_n monoton olarak 0'a azalan basamak fonksiyonların bir dizisi olsun, yani

$$(4.15) \quad f_n(x) \downarrow 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ise

$$\text{(4.16)} \quad \lim_n \int f_n = 0$$

dır.

Burada geçen "azalan" kavramı her x için $f_n(x)$ dizisinin artan olmaması ve limitinin 0 olması anlamındadır. Bu durumda elbet te f_n'lerin hiçbiri negatif değildir. Üstelik ilk terimi bir $[a, b)$ aralığının dışinda sıfır dolayısıyla diğer terimlerde aynı özelliktedir. Burada önemli şey limitin düzgünlük varsayımı olmadan integral dizisinin limitinin sıfır olmasıdır.

Kanıt. Basamak fonksiyonlarının integrallerinin tanımına geri giderek, her x için $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$ eşitsizliğinin $\int f_n$ dizisinin azalan (yukarıdaki anlamda artan olmayan) bir dizi olduğunu elde ederiz. Dolayısıyla iki durum vardır: ya 0 a yakınsar ya da pozitif bir değere yakınsar, son durumda her n için $\int f_n > \delta$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ vardır, dolayısıyla bunun olamayacağını göstermeliyiz.

Verilen $\epsilon > 0$ için

$$\text{(4.17)} \quad S_j = \{x \in [a, b) : f_j(x) \leq \epsilon\}$$

kümesini ele alalım. (Burada f_1 $[a, b)$ aralığı dışında sıfırdır, dolayısıyla her n için f_n bu aralık dışında sıfırdır. S_j kümelerinin herbiri aralıkların sonlu birleşimidir. Üstelik her x için $f_n(x) \to 0$ olduğundan

$$\text{(4.18)} \quad \bigcup_j S_j = [a, b)$$

dır. Aslında S_j artandır. $B_1 = S_1$ ve

$$\text{(4.19)} \quad B_j = S_{j+1} \setminus S_j$$

alınırsa B_j ler ayrık, herbiri sonlu sayıda aralıklar içerir ve

$$\text{(4.20)} \quad \bigcup B_j = [a, b)$$

dir. Önerme 2'yi B_j aralıklarına uygulayabiliriz. $l(B_j)$ B_j'nin uzunluğu olarak alırsak, birleşimi alınan sonlu tane aralığın uzunluklarının toplamı

$$\text{(4.21)} \quad \sum_j l(B_j) = b - a$$

sağlayacaktır.

A'yı $f_1(x) \leq A$ olarak seçelim. Bu durumda A, f_n'lerin bir üst sınırı olacaktır.

$$(4.22) \qquad \sum_{j \geq N} l(B_j) < \epsilon$$

olacak biçimde yeterince büyük bir N seçebiliriz. $k \geq N$ için f_k'nın S_N üzerinde parçalara bölünmesiyle

$$(4.23) \qquad \int f_k \leq (b-a)\epsilon + \epsilon A$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin sağ tarafının birinci kısmı S_N üzerinde $f_k \leq \epsilon$ olmasından, diğer kısmı ise geriye kalan aralıkların uzunluklarının toplamının ϵ'dan büyük olmamasındandır.

Bu integralin sonunda küçük olduğunu gösterir!!!

Daha kuvvetli bir sonuç aşağıdadır.

Önerme 3. g_n aşağıdaki özellikleri sağlayan gerçel değerli ve azalmayan basamak fonksiyonların bir dizisi olsun.

$$(4.24) \qquad \lim_{n \to \infty} g_n(x) \in [0, \infty] \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Bu durumda

$$(4.25) \qquad \lim_{n \to \infty} \int g_n \in [0, \infty].$$

Yukarıda $[0, \infty]$ yazılmasının nedeni azalmayan $g_n(x)$ dizisinin limitte "0 ya da pozitif" olabileceğinin yanısıra "$+\infty$" yakınsaması nedeniyledir ve bu durum integrallerin dizisi için de doğrudur.

Kanıt.

$$(4.26) \qquad f_n(x) = \max(0, -g_n(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu dizi negatif olmayan ve her noktada 0'a azalan dizidir ve

$$(4.27) \qquad \int g_n \geq -\int f_n$$

dır. Açıklandığı gibi bu Önteoremden elde edilir.

Bundan sonra bunu kullanarak Lebesgue integralinin tanımının bazı anlamlarda anlamlı olduğunu göstereceğiz. Bunun yanında integralin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz.