MIT Açık Ders Malzemeleri
http://ocw.mit.edu
Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Koşulları hakkında bilgi almak için http://ocw.mit.edu/terms veya http://www.acikders.org.tr adresini ziyaret ediniz.
18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 3. BANACH UZAYLARI

Bir normlu uzaydan bir Banach uzayına tanımlı sınırlı dönüşümlerin bir Banach uzayı olduğunun kanıtını hatırlayalım. Bunun için çok zor olmayan kanıtın adımlarını hatırlamakta yarar var: Bir normlu uzayın Banach uzayı olması için gerekli ve yeterli koşul her "mutlak toplanabilir (absolutely convergent)" serinin yakınsak olmasıdır. Burada geçen mutlak toplanabilme, normların toplamının sonlu olması anlamındadır. Kanıtın büyük bir kısmı mutlak toplanabilir diziler yardımıyla, her normlu uzayın bir Banach uzayına tamamalanabileceği ile ilgilidir. Kanıtın son kısmı bir sonraki ev ödevinin, ve kanıtın nasıl sonlandırılabileceği konusunda yol gösterici olan, ilk sorusudur. Önceki dersde yer alan tamlık ile ilgili kısmın kanıtı aşağıdakilerin içerisindedir.

(1) Wilde:-Önerme 1.6

(2) Chen:-Bulamadım.

(3) Ward:- En kolay yolu Önteorem 2.1.

Bugünkü derste normlu uzayın tamlanışı hakkında yapmış olduğum konunun biraz kısaltılmış biçimi burada. İkinci problem listesinde yer alan problemlerin birinci kısmını 24 Şubat a kadar değil, MIT takvimine göre bitirmenizi istiyorum. Bu problemler zor gözükse de bunlara çalışmanız konuyu anlamanızı sağlayacaktır. Bunları yapmadan önce, bize gerekecek bilgileri vereceğiz.

V, $\|.\|_V$ normuna göre bir normlu uzay olsun. V'nin *tamlanışı* aşağıdaki koşulları sağlayan bir B Banach uzayıdır.

(1) Bir $I : V \to B$ birebir (1-1) doğrusal fonksiyon vardır.

(2) Her $v \in V$ için

$$\|I(v)\|_B = \|v\|_V. \tag{3.1}$$

(3) V'nin görüntüsü $I(V) \subset B$, B'de yoğundur.

V'nin kendisi bir Banach uzayı ise $B = V$ ve I'yi birim fonksiyon olarak seçebiliriz.

Teorem 1 *Her normlu uzayın bir tamlanışı vardır.*

"Kanıt" (Son kısmı size bırakıldı). Öncelikle daha büyük bir uzay tanımlayalım.

$$\tilde{V} = \{(u_k)_{k=1}^{\infty} : u_k \in V, \quad \Sigma_{k=1}^{\infty} \|u_k\| < \infty\}. \tag{3.2}$$

$\tilde{V}$'nın elemanlarına V'deki *mutlak toplanabilir seriler* denir.

$\tilde{V}$'nın elemanlarının bir Cauchy dizisi olduğu gösterildi. Yani (u_k) mutlak toplanabilir bir dizi ise $v_N = \Sigma_{k=1}^{N}$ kısmi toplamlar dizisi, Cauchy dır.

Aşağıdaki dizilerin toplama ve bir sabitle çarpma işlemine göre $\tilde{V}$ bir vektör uzayıdır (lineer uzay):-

$$(3.3)\quad t_1(u_k) + t_2(u'_k) = (t_1 u_k + t_2 u'_k).$$

Bu mutlak toplanabilir seriler için üçgen eşitsizliğini verir:

$$(3.4)\quad \sum \left\| t_1 \sum_k u_k + t_2 u'_k \right\| \leq |t_1| \, \|u_k\| + |t_2| \sum_k \left\| u'_k \right\|.$$

$\tilde{V}$'nin altuzayı

$$(3.5)\quad S = \{(u_k) : \sum_k \|u_k\| < \infty, \quad \sum_k u_k = 0\}$$

ele alalım. $\tilde{V}$'nin S'ye göre bölüm uzayına B diyelim. Yani

$$(3.6)\quad B = \tilde{V}/S.$$

B'nin elemanları, $(u_k) \in \tilde{V}$ olmak üzere, $(u_k) + S \subset \tilde{V}$ biçimindedir. B'nın aşağıdaki özellikleri sağladığını kontrol edelim.

(1) B üzerinde bir norm

$$(3.7)\quad \|b\|_B = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k \right\|, \quad (u_k) + S = b$$

olarak tanımlanır.

(2) İlk uzay V, B uzayına aşağıdaki gibi gömülebilir:

$$(3.8)\quad V \ni v \to I(v) = (u_k) + S, \quad u_1 = v, \quad u_k = 0 \quad \forall k > 1$$

ve norm (3.1)'ı sağlar.

(3) $I(V) \subset B$ yoğundur.

(4) B, (3.7) deki norma göre bir Banach uzayıdır.

Öncelikle (3.7) bir normdur. Bir Cauchy dizisinin normlari $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisi olduğundan (3.7)'nin sağ tarafındaki limit vardır. S'nin elemanlarının özelliğinden dolayı, S'nin bir elemanının $(u_k) \in \tilde{V}$ eklenmesiyle kısmı toplamlar dizisinin normu değişmez. Buradan $b \in B$ için $\|b\|_B$ iyi tanımlı olduğu görülür. Ayrıca $\|b\|_B = 0$ olması tam anlamıyla (u_k) dizisinin normda 0'a yakınsamasıdır ve dolayısıyla S nin elemanı ve böylece $b = 0$. $b, b' \in B$ sırasıyla

$\tilde{V}$ deki (u_k) ve $(u^{'}{}_k)$ dizileriyle temsil edilsin. Bu durumda $tb, b+b^{'} \in B$ elemanları $\tilde{V}$ de sırasıyla (tu_k) ve $(u_k + u^{'}{}_k)$ dizileriyle temsil edilirler ve

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} tu_k\right\| = |t|\, lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\|,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{n}(u_k + u^{'}{}_k)\right\| = A \Longrightarrow$$

$$(3.9)\text{verilen}\, \epsilon > 0, \text{için} \exists N \ni \forall n \geq N, A - \epsilon \leq \left\|\sum_{k=1}^{n}(u_k + u^{'}{}_k)\right\| \Longrightarrow$$

$$A - \epsilon \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} u_k\right\| + \left\|\sum_{k=1}^{n} u^{'}{}_k\right\| \quad \forall n \geq N \Longrightarrow$$

$$A - \epsilon \leq \|b\|_B + \|b'\|_B \quad \forall \epsilon > 0 \Longrightarrow$$

$$\|b + b'\|_B \leq \|b\|_B + \|b'\|_B.$$

Bu durumda $I(v) = v, 0, 0, ...,$ elemanının normu kısmi toplamlar dizisinin normlarının limitidir ve böylece $\|v\|_V$ dolayısıyla $\|I(v)\|_B = \|v\|_V$ ve $I(v) = 0$, buradan da $v = 0$ elde edilir. Yani I birebirdir.

B'nin tam ve $I(V)$'nin yoğun olduğunu göstermeliyiz. Bunun zorluğunun tartışması burada. Belki siz kendi yönteminizle farklı bir yönden bakabilirsiniz. Bu konuda sonraki problemler listesi için kendi yöntemlerinizi yazmanızı istiyorum.

Bugün dersde gördügümüz gibi, B'nin Banach uzayı olması B'deki her mutlak toplanabilir serinin yakınsak olmasıdır. $(u_k^{(n)}) \in \tilde{V}$ olmak üzere B'de (b_n) dizisi $b_n = (u_k^{(n)}) + S$ verilsin ve toplanabilme koşulu sağlansın. Yani

$$(3.10) \quad \infty > \sum_n \|b_n\|_B = \sum_n \lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{k=1}^{N} u_k^{(n)}\right\|_V.$$

Buradan $\sum_n b_n = b$ olduğunu, limit b'yi bulmamız gerekiyor. Bunun mutlak toplanabilir bir seriyle verileceği varsayılıyor. Burada "problem" belli anlamda bu serinin $\sum_n \sum_k u_k^{(n)}$ ne benzeyeceği. Çünkü serinin b_n lerin toplamıyla temsil edildiği varsayılıyor. Şimdi

$$(3.11) \quad \sum_n \sum_k \left\|u_k^{(n)}\right\|_V < \infty$$

olduğunun gösterilmesi çok iyi olacaktır. Çünkü bu çift toplamdan kurtulmamıza firsat verir ve buradan mutlak toplanabilir bir seri elde edilebilir. Kötü olan durum (3.11)'nin olmasının gerekmediği. k üzerinden toplamın her n için yakınsak olduğunu biliyoruz fakat toplamın yakınsak olduğunu bilmiyoruz. Bildiğimiz (3.10) da sadece 'normların limitlerinin' toplamının yakınsadığı.

Problemin çözümü için yollardan biri b_n'nin 'temsilini' ilk olarak $(u_k^{(n)})$ olarak seçmek zorunda olmamamiz-b_n'nin temsilini $(u_k^{(n)})$'e S'nin bir elemanını ekleyerek yapabiliriz. Her sabit n için, u_k^n'i 'daha hızlı yakınsayacak biçimde düzenlemek bir fikir. Verilen $\epsilon > 0$'e karşılık her $N \geq N_1$ için

$$\left| \left\| \sum_{k \leq N} u_k^{(N)} \right\|_V - \|b_n\|_B \right| \leq \epsilon, \quad \sum_{k \geq N} \left\| u_k^{(n)} \right\|_V \leq \epsilon \tag{3.12}$$

olacak biçimde N_1 sayısı seçebiliriz. Üstelik $N_j < N_{j-1}$ olarak seçebiliriz (n'nin sabitlendiğini hatırlayalım), dolayısıyla

$$\left| \left\| \sum_{k \leq N_j} u_k^{(N)} \right\|_V - \|b_n\|_B \right| \leq 2^{-j}\epsilon, \quad \sum_{k \geq N_j} \left\| u_k^{(n)} \right\|_V \leq 2^{-j}\epsilon. \tag{3.13}$$

Şimde 'serinin yeni toplamı' $v_1^{(n)} = \sum_{k=1}^{N_1} u_k^{(n)}$, $v_j^{(n)} = \sum_{k=N_{j-1}}^{N_j} u_k^{(n)}$ tanımlamasıyla, n'inci seriler için $\epsilon = 2^{-n}$ alınsın. Şimdi

$$\sum_n \sum_k \|v_k^n\|_V < \infty \tag{3.14}$$

olduğunu kontrol ediniz.
Tabii ki, ilk toplanabilir seri gibi $b_n = (v_k^n) + S$ alınarak elde edilen yeni toplanabilir serinin de çalıştığı kontrol edilmeli. Şimdi

$$b = (w_k) + S, \quad w_k = \sum_{l+p=k} v_l^{(p)} \in V \tag{3.15}$$

olarak tanımlanan dizinin limitini bulmaya çalışalım. Dolayısıyla (w_k)'nin V'de mutlak toplanabilir ve $n \to \infty$ için $b_n \to b$ olduğunu kontrol etmeliyiz.

Tamlık hakkında gerekirse daha fazla tartışma yapabilirim.

Son olarak $I(v)$'nin B içerisinde yoğun olduğu sorusu var. Bu yukarıdaki aynı fikirle yapılabilir-belkide bunu önce yapmak daha iyi olabilirdi. Verilen $b \in B$ elemanı için, $k \to \infty$ iken $\|I(v_k) - b\|_B \to 0$ olacak biçimde $v_k \in V$

elemanları bulmalıyız. b'yi temsil eden mutlak toplanabilir (u_k) serisini ve $v_j = \sum_{k=1}^{N_j} u_k$ alalım, N_j'ler yukarıdaki gibi oluşturuldu.

$$\|I(v_j) - b\|_B = \lim_{p\to\infty} \left\| \sum_{p>N_j} u_p \right\|_V \leq \sum_{p>N_j} \|u_p\|_V \tag{3.16}$$

eşitsizliğinden $I(v_j) \to b$ olduğunu kontrol ediniz.

PROBLEMLER 2

Problem 2.1 10 Şubat da dersde inşa edilmiş olan uzayın tam olduğu konusundaki kanıtı tamamlayınız. Bu inşanın betimlenmesi Ders 3'de bulunacağı gibi gösterilen yol izlenerek de yapılabilir.

Problem 2.2. Basamak fonksiyonların mutlak toplanabilir dizileri örneğine bakalım. $[0, 1)$ aralığı için (sağdan kapalılık ve soldan açıklık seçimi konusunda kuvvetli bir tercih olduğunu hatırla) bir çeşit standart Cantor altkümesinin, basamaklardaki 3 işlemini gözönüne alalım. Yani merkez aralık $[\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ aralığını çıkartalım. Geriye $C_1 = [0, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, 1)$ kalacaktır. Kalan aralıkların herbirinin merkez aralıklarının çıkarılmasıylada $C_2 = [0, \frac{1}{9}) \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}) \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}) \cup [\frac{8}{9}, 1)$ kümesi elde edilir. Bu yol takip edilerek $C_k \subset C_{k-1}$ özelliğinde her biri sonlu tane yarı-açık aralıkların birleşimi olan kümeler elde ederiz. Şimdi C_k üzerinde $f_k(x) = 1$, diğer durumlarda 0 olan f_k basamak fonksiyonlarının *serisini* ele alalım.

(1) Bu serinin mutlak toplanabilir olduğunu kontrol ediniz.

(2) Hangi $x \in [0, 1)$ için $\sum_k |f_k(x)|$ yakınsaktır.

(3) Bu serinin varlığı yardımıyla $[0, 1)$ aralığında Lebesgue integrallenebilir (Ders 4 de tanımlandığı gibi) bir fonksiyon tanımla ve bunun Lebesgue integralini hesaplayınız.

(4) Bu fonksiyon Riemann integrallenebilir midir (Riemann integralin tanımı hatırlanırsa bu kolay, zor değildir).

(5) Son olarak çıkartılan kümelerin birleşimleri üzerinde 1 ve diğer yerlerde sıfır olan g fonksiyonunu ele alalım. g'nin Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösterip ve integralini hesaplayınız.

Problem 2.3 $\mathbb{R}^2$ için örtme Önteoremi. $\mathbb{R}^2$ nin $[a_1, b_1) \times [a_2, b_2)$ biçimindeki alt kümesine bir dikdörtgen diyeceğiz. Bu dikdörtgenin alanı $(b_1 - a_1) \times (b_2 - a_2)$ olarak tanımlanır.

(1) Aralıkları alt aralığa bölerek bir dikdörtgeni altdikdörtgenlere ayırabiliriz.- $[a_1, b_1)$'i $[a_1, b_1) \cup [a_2, b_2)]$ ile değiştirerek. Bir dikdörtgenin alanının altdikdörtgenlerinin alanlarının toplamına eşit olduğunu gösteriniz.

(2) Sonlu ve ayrık dikdörtgenlerin birleşiminin bir dikdörtgen olduğunu varsayalım (her zaman aynı yarı-açık anlamında). Ayrık dikdörtgenlerin alanlarının toplamının birleşimlerinin oluşturduğu dikdörtgenin alanı olduğunu gösteriniz (İp ucu: altbölme işlemini uygula).

(3) Birleşimleri bir dikdörtgen içinde kalan sayılabilir ayrık dikdörtgenler topluluğunun alanları toplamının bunları içine alan dikdörtgenin alanından küçük ya da eşit olduğunu gösteriniz.

(4) Sonlu dikdörtgenler topluluğunun alanlarının toplamının bunları içine alan dikdörtgenin alanından, küçük ya da eşit olduğunu gösteriniz.

(5) Önceki sonuçda geçen işlemi sayılabilir dikdörtgenlerin birleşimleri içerisinde kalan dikdörtgenler için genişletilebileceğini kanıtlayınız.

Problem 2.4

(1) $[0,1]$ aralığındaki tanımlı sürekli her fonksiyonun $[0,1)$ aralığında tanımlı basamak fonksiyonların *düzgün limiti* olduğunu gösteriniz. (İp ucu:- gerçel duruma indirgeme, aralığı 2^n eşit aralığa böl ve basamak fonksiyonu her bir bölünen aralıkta sürekli fonksiyonun infimum değeri olarak tanımla. Sonra düzgün yakınsamayı kullan.

(2) 'Teleskopik yoketme' yöntemini kullanarak sürekli her fonksiyonun, f_j ler her $x \in [0,1)$ için $\sum_i |f_j(x)| < \infty$ koşulunu sağlayan basamak fonksiyonlar olmak üzere f_j lerin toplami, yani

$$\sum_i f_j(x) \quad x \in [0,1) \tag{3.17}$$

olarak yazılabileceğini gösteriniz.

(3) $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli her fonksiyonun, bu aralık dışında 0 değeri alan genişletilmiş fonksiyonun $\mathbb{R}$ de Lebesgue integrallenebilir olduğunu gösteriniz.

İlk dört problem küçük L_p uzayları olarak ta anılan l^p uzayları hakkındadır. Çözümleri l_2 için verebileceğiniz gibi her p, $1 \leq p < \infty$ için de verebilirsiniz.

Problem 1.1 Her $p, 1 \leq p < \infty$ veya sadece $p = 2$ için;

$$l^p = \{a : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p < \infty, a_j = a(j)\}$$

dizilerinin aşağıdaki normla,

$$||a||_p = (\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^p)^{1/p}$$

normlu bir uzay olduğunu gösteriniz. Bu tanımlanan dizilerin bir vektör uzayı olduklarını ve tanımlanan normun norm olmak için sağlaması gereken üç koşulu sağladığının gösterilmesi demektir.

Çözüm. Herhangi bir kümeden değerlerini bir vektör uzayında alan fonksiyonların vektör uzayı olduğunu biliyoruz- buradaki toplama işlemi değerlerin toplamı biçimindedir. Dolayısı ile l^p'nin vektör uzayı olabilmesi için toplama ve skalerler ile çarpma işlemleri altında kapalı olması gerekiyor. Skalerler ile çarpma işlemi altında kapalılığı göstermek kolaydır:

$$(3.18) \quad |ta_i| = |t||a_i| \Rightarrow ||ta||_p = |t|||a||_p$$

Bu zaten $||.||_p$ ifadesinin norm olduğunu göstermekte gerekliydi. l^p de olan a, b dizilerinin toplamı $a+b$ nin de l^p de olması üçgen eşitsizliğinin uygulaması ile edilir. $0 \leq t$ için t^p fonksiyonunun artan olduğunu kullanarak;

$$(3.19) \quad |a_i + b_i|^p \leq (2maks(|a|_i, |b|_i))^p = 2^p maks(|a_i|^p, |b_i|^p) \leq 2^p(|a_i|^p + |b_i|^p).$$

Buradan da

$$||a+b||_p^p = \sum_j |a_j + b_j|^p \leq 2^p(||a||^p + ||b||^p)$$

elde edilir. l^p nin norm uzayı olduğunu kanıtlamak için $||a||_p$ nin gerçekten bir norm olduğunu kanıtlamalıyız. $||a||_p$ sıfır'dan küçük değerler alamaz. Eğer $||a||_p = 0$ ise, bu her i için, $a_i = 0$ demek olacağından, $a = 0$ buluruz. Geriye kalan tek husus ise üçgen eşitsizliğinin sağlandığıdır. Eğer $p = 1$ ise, istenilen, mutlak değer fonksiyonunun üçgen eşitsizliğini sağlamasından elde edilir:

$$(3.20) \quad ||a+b||_1 = \sum_i |a_i + b_i| \leq \sum_i (|a_i| + |b_i|) = ||a||_1 + ||b||_1$$

p'nin $1 < p < \infty$ değerleri için kanıtlamamız gereken eşitsizliğe Minkowski eşitsizliği adı verilir. Minkowski eşitsizliği Young eşitsizliği olarak tanınan eşitlikten elde edilen Hölder eşitsizliğinin bir sonuçudur. Young eşitsizliği, $1/p + 1/q = 1$ için (dolayısı ile $q = p/(p-1)$ dir).

$$(3.21) \quad \alpha\beta \leq \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}, \forall \alpha, \beta \geq 0$$

Bunu görmek için, $\alpha = x$ fonksiyonu olarak,

$$(3.22) \quad f(x) = \frac{x^p}{p} - x\beta + \frac{\beta^q}{q}$$

Bu fonksiyon $x = 0$'da negatif değildir ve $x > 0$ değerleri için x^p, $x\beta$ dan daha hızlı büyüdüğü için, pozitiftir. Dahası, türevlenebilir bir fonksiyondur ve türevi sadece $x^{p-1} = \beta$ değerinde sıfır olup, burada $x > 0$ için mutlak bir minimum değerine sahiptir. Bu noktada $f(x) = 0$ olduğundan Young eşitsizliğini elde ederiz. Şimdi bu eşitsizliği, $\alpha = |a_i|/||a||_p$, $\beta = |b_i|/||b||_q$ (kuşkusuz iki sayı da sıfırdan farklı kabul edilmektedir) sayıları için kullanıp, i üzerinden toplam alarak Hölder eşitsizliğini

$$(3.23) | \sum_i a_i b_i|/||a||_p||b||_q \leq \sum_i |a_i||b_i|/||a||_p||b||_q \leq \sum_i \left(\frac{|a_i|^p}{||a||_p^p p} + \frac{|b_i|^q}{||b||_q^q q} \right) = 1$$

ve buradan da

$$\Rightarrow | \sum_i a_i b_i| \leq ||a||_p||b||_q$$

buluruz. Şimdi buradan, üçgen eşitsizliği ve birinci çarpanda q kuvveti alarak, Minkowski eşitsizliğini elde ederiz.

$$(3.24) \quad \sum_i |a_i + b_i|^p \leq \sum_i |a_i + b_i|^{(p-1)} |a_i + b_i|$$

$$\leq \quad \sum_i |a_i + b_i|^{(p-1)} |a_i| + \sum_i |a_i + b_i|^{(p-1)} |b_i|$$

$$\leq (\sum_i (|a_i + b_i|^p))^{1/q} (||a||_p + ||b||_q)$$

İlk çarpanla bölerek, sağ tarafta

$$(3.25) \quad ||a + b||_p \leq ||a||_p + ||b||_p$$

Dolayısıyla, l^p gerçekten normlu bir uzaydır.

Problem 1.2 Problem 1.1 deki zor kısım üçgen eşitsizliği idi. Eğer size her$N$ için

$$(\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p)^{1/p}$$

ifadesinin $\mathbb{C}^N$ de norm olduğu verilseydi, bunu kullanabilir miydiniz?

Çözüm. Evet, gerçekten her N için ,

$$(3.26) (\sum_{j=1}^{N} |a_j + b_j|^p)^{1/p} \leq (\sum_{j=1}^{N} |a_j|^p)^{1/p} + (\sum_{j=1}^{N} |b_j|^p)^{1/p}$$

doğru olsaydı, l^p nin öğeleri için norm yukarıdaki sağ taraf için bir üstsınır olurdu, yani,

$$(3.27) \quad (\sum_{j=1}^{N} |a_j + b_j|^p)^{1/p} \leq ||a||_p + ||b||_p$$

Sol taraf N sayısının artan değerleri ile arttığından, yakınsar ve üstten, N sayısından bağımsız olan, sağ taraftaki ifade ile sınırlı olur. Bu üçgen eşitsizliğidir. Özetlersek, bu ilk problemdeki us yürütmenin N'den bağımsız olarak tekrarıdır.

Problem 1.3 Problem 1.1 de tanımlanan l^p nin ya da l^2 nin tam olduğunu kanıtlayınız. Yani Banach uzayı olduğunu gösteriniz. Yani her Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu kanıtlayınız. Burada problem verilen Cauchy dizisinin limitini bulmaktır. Her N için N noktasında budanmayla elde edilen $\mathbb{C}^N$ deki her dizinin $\mathbb{C}^N$ de bir Cauchy dizisi olduğunu gösteriniz.

Çözüm. l^p uzayında Cauchy dizisi olan $a^{(n)}$ alalım. Dizideki her öğe yine l^p de olan, $\{a_j^{(n)}\}_{j=1}^{\infty}$ dizisidir. Aşağıdaki Problem 1.5 de kanıtlanacak olan normun sürekliliğinden, $||a^{(n)}||$ dizisi $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir ve yakınsar. Buradan dizinin sınırlı olduğunu elde ederiz. Yani, bir A sayısı ve her n için $||a^{(n)}||_p \leq A$ vardır. Cauchy tanımından, verilen $\epsilon > 0$ için, öyle bir M sayısı vardırki her $m, n > M$ için

$$(3.28) \quad ||a^{(n)} - a^{(m)}||_p = (\sum_i |a_i^{(n)} - a_i^{(m)}|^p)^{1/p} < \epsilon/2$$

Her i damgası için, $|a_i^{(n)} - a_i^{(m)}| \leq ||a^{(n)} - a^{(m)}||_p$ sağlandığından, $a_i^{(n)}$ dizisi $\mathbb{C}$'de Cauchy dizisidir. $\mathbb{C}$ tam olduğundan, her i = 1,2,... için

$$(3.29) \quad lim_n a_i^{(n)} = a_i$$

vardır. Verilen dizinin limiti için aday, $a = (a_i)$ dizisidir. Normların sınırlılığı,

$$(3.30) \quad \sum_i^N |a_{i=1}^{(n)}|^p \leq A^p$$

verir, burada $n \to \infty$ iken limit alarak

$$(3.31) \quad \sum_i^N |a_i|^p \leq A^p, \forall N \Rightarrow ||a||_p \leq A$$

bulunur. Dolayısı ile $a \in l^p$ bulundu. Benzer biçimde Cauchy koşulundaki sonlu eşitsizlikte $m \to \infty$ iken limit alarak,

$$(3.32) \quad (\sum_{i=1}^N |a_i^{(n)} - a_i^{(m)}|^p)^{1/p} < \epsilon/2$$

elde ederiz. Dolayısıyla, her N için

$$(3.33) \quad (\sum_i^N |a_i^{(n)} - a_i|^p)^{1/p} \leq \epsilon/2$$

bulur ve buradan da

$$(3.34) \quad ||a^{(n)} - a|| < \epsilon, \forall n > M$$

elde ederiz ve bu l^p uzayında, $a^{(n)} \to a$ demektir.

Problem 1.4 İsterseniz $n = 2$ alabilirsiniz, l^p uzayının birim yuvarı S kümesini düşünelim. Bu küme uzunlukları 1 olan vektörlerin

$$S = \{a \in l^p : ||a||_p = 1\}$$

kümesidir.

(1) S kümesinin kapalı olduğunu gösteriniz.

(2) Dilerseniz Rudin'nin kıtabına da bakarak, metrik uzaylarda kompakt kümelerin dizisel betimlenişini anımsayınız.

(3) Dilerseniz n-inci yerde 1, kalan koordinatlarda 0 olan diziyi düşünerek S kümesinin kompakt olmadığını kanıtlayınız.

Çözüm. Bir sonraki alıştırmada ele alınan, normun sürekliliği nedeni ve S kümesinin, kapalı $\{1\}$'in kümesinin ters görüntüsüne eşit olmasından, S kapalıdır.

Anımsanmasını istediğimiz sonuç, metrik uzaylarda bir altkümenin kompakt olması için gerek ve yeter koşulun kümedeki her dizinin yine küme içinde yakınsayan bir altdizisinin olmasıdır.

Bu durumda aşağıdaki diziler dizisini ele alalım:

$$(3.36) \quad a_i^{(n)} = \begin{cases} 0, & \text{eğer}, i \neq n \\ 1, & \text{eğer}, i = n \end{cases}$$

Bu dizinin $n \neq m$ için, $||a^{(n)} - a^{(m)}||_p = 2^{1/p}$ özelliği vardır. Bu nedenle hiç bir Cauchy altdizisi olamaz. Bu nedenle yakınsak değildir. Bu da S kümesinin kompakt olamıyacağını verir.

Bu sonuç önemlidir. Sonlu ve sonsuz boyutlu normlu uzaylar arasındaki temel farklılığı gösterir. Sonlu boyutlu uzaylarda Heine-Borel teoreminden birim yuvar kompakt, sonsuz boyutlu uzaylarda ise kompakt değildir.

Problem 1.5 Normlu her uzayda, norm süreklidir.

Çözüm. Esasına bakarsanız bu problemi çok daha önce ele almalıydık! Üçgen eşitsizliği normlu bir uzaydaki u, v vektörleri için

$$(3.37) \quad ||u|| \leq ||u - v|| + ||v||, ||v|| \leq ||u - v|| + ||u||$$

verir, buradan da

$$(3.38) \quad |||u|| - ||v||| \leq ||u - v||$$

bulunurki, bu normun sadece sürekliliğini değil aynı zamanda Lipschitz sürekliliğini de verir.