18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 26.HAHN-BANACH TEOREMİ ve ÖZET

Bu derste neler yaptığımızın hızlı bir özetini vermeden önce Hahn-Banach Teoremini ifade edip kanıtlayacağız. Bu teorem fonksiyonellerin genişlemesi hakkındadır. Temel sorulardan biri: Normlu uzaylarda aşikar (yani, sıfırdan farklı) olmayan sürekli bir fonksiyonel var mıdır? sorusudur. Bu dual uzayın aşikar olmayacağını yanıtlar. Bu sorunun yanıtı Hilbert uzaylarında hatta ön Hilbert uzayları için Riesz Temsil Teoreminden elde edilir, çünkü bu uzaylarda uzayın duali ile kendisi aynydır. Hahn-Banach teoremini bir normlu uzayın tamlanışının olduğunu göstermek için de kullanacağız.

Theorem 19(Hahn-Banach). Eğer $M \subset V$ bir normlu uzayın doğrusal altuzayı, $u : M \to \mathbb{C}$ aşağıdaki (26.1) süreklilik koşulunu sağlayan dogrusal dönüşüm ve

$$(26.1) \quad |u(t)| \leq C\|t\|_V \quad \forall t \in M$$

ise her $x \in M$ için $U(x) = u(x)$ ve $\|U\| \leq C$ olacak biçimde sınırlı bir $U : V \to \mathbb{C}$ doğrusal dönüşüm vardır.

Önce hesaplamalarla, sürekli doğrusal fonksiyonları normu arttırmadan 'biraz' genişletiriz.

Önteorem 20. $M \subset V$ normlu uzayın bir altuzayı, $x \notin M$ ve $u : M \to \mathbb{C}$ (26.1) de olduğu gibi sınırlı doğrusal bir fonksiyonel olsun. Bu durumda

$$(26.2) \quad u'|_M = u, \quad |u'(t+ax)| \leq C||t+ax||_V, \quad \forall \quad t \in M, \quad a \in \mathbb{C}$$

olacak biçimde $u' \in M' = \{t' \in V : t' = t + ax, a \in \mathbb{C}\}$ fonksiyoneli vardır.

Kanıt. M' uzayındakidaki bir noktanın $t' = t + ax$ yazılımı tektir, çünkü $t + ax = \tilde{t} + \tilde{a}x$ ise $(a - \tilde{a})x \in M$ dolayısıyla, $x \notin M$ olduğundan, $a = \tilde{a}$ ve böylece $t = \tilde{t}$ elde edilir. Buradan

$$(26.3) \quad u'(t+ax) = u'(t) + au(x) = u(t) + \lambda a, \quad \lambda = u'(x)$$

elde edilir. Burada kullanabileceğimiz tek şey λ'nın seçimidir. λ'nın herhangi bir seçimi u'nın bir genişlemesini verir, burada sorun u'nın normunu arttırmadan genişletimin yapılmasıdır. Eğer $C = 0$ ise $u = 0$ bir genişletimdir. u fonksiyonelini $1/C$ ile çarparak C sayısını 1 olarak alabiliriz. Şimdi eğer u' u/C fonksiyonelinin genişletimi ise Cu' fonksiyoneli u fonksiyonelinin genişletimidir ve (26.2) koşullarını sağlar. Artık,

$$(26.4) \quad |u(t)| \leq \|t\|_V \quad \forall t \in M$$

olduğunu varsayabiliriz. λ sayısını aşağıdaki eşitsizliği sağlayacak biçimde seçmek istiyoruz.

$$(26.5) \quad |u(t) + a\lambda| \leq ||t + ax||_V \, \forall t \in M, \quad a \in \mathbb{C}$$

$a = 0$ ise λ üzerinde bir kısıtlama yoktur. $a \neq 0$ için (26.5) da a ile bölerek

$$(26.6) \quad |a|u(\frac{t}{a}) - \lambda| = |u(t) + a\lambda| \leq ||t + ax||_V = |a|||\frac{t}{a} - x||_V$$

elde ederiz. $\frac{t}{a} \in M$ olduğundan

$$(26.7) \quad |u(t) - \lambda| \leq ||t - x||_V \quad \forall u \in M$$

olacak biçimde ayarlanır ve genel durum buradan elde edilir.

Dolayısıyla λ'yı gerçel seçebiliriz. Kompleks değerli bir fonksiyonel gerçel kısmından elde edilebilir. Dolayısı ile her $t \in M$ için,

$$(26.8) \quad w(t) = Re(u(t)) \quad \forall t \in M$$

diyelim ve w'yi gerçel değerler alan bir fonksiyonele genişletmeye çalışalım- bu elbetde komplex sayılar üzerinde doğrusal olmayacak ama gerçel sayılar üzerinde doğrusal olacaktır, ancak (26.7)'nin bir benzerini elde etmek istiyoruz:

$$(26.9) \quad |w(t) - \lambda| \leq ||t - x||_V \quad \forall t \in M,$$

bu doğrusallığı içermiyor. w fonksiyonelinin (26.4) deki norm eşitsizliğini sağladığını bildiğimizden, oradan

$$(26.10) \quad |w(t_1) - w(t_2)| \leq |u(t_1) - u(t_2)| \leq ||t_1 - t_2|| \leq ||t_1 - x||_V + ||t_2 - x||_V$$

buluruz. Buradan da

$$w(t_1) - w(t_2) \leq ||t_1 - x||_V + ||t_2 - x||_V \Longrightarrow$$

$$(26.11) \quad w(t_1) - ||t_1 - x|| \leq w(t_2) + ||t_2 - x||_V \quad \forall t_1, t_2 \in M.$$

elde ederiz. Bu eşitsizliğin sağ tarafından inf, sol tarafından sup alarak arada bir λ seçebiliriz-yani

$$(26.12) \quad w(t_1) - ||t_1 - x|| \leq \sup_{t_1 \in M} (w(t_1) - ||t_1 - x||) \leq \lambda$$

$$\leq \inf_{t_2 \in M} (w(t_2 + ||t_2 - x||) \leq w(t) + ||t - x||_V \quad \forall t_1, t_2 \in M.$$

Bu aşağıdaki ifadeyi gerektirir.

$$(26.13) \quad -||t-x||_V \leq -w(t)+\lambda \leq ||t-x||_V \Longrightarrow |w(t)\lambda| \leq -||t-x||_V \quad \forall t \in M.$$

Bu aradığımız durumdur-u'nın gerçel kısmını genişletmeyi başardık.

$$(26.14) \quad w'(t + ax) = w(t) - (Rea)\lambda \quad \text{ve} \quad |w'(t + ax)| \leq ||t + ax||_V.$$

Böylece u'nın genişlemesini kompleksleştirme yaparak elde ederiz. Böylece

$$(26.15) \quad u'(t + ax) = w'(t + ax) - iw'(i(t + ax))$$

elde ederizki bu genişletim kompleks sayılar üzerinde doğrusaldır. Çünkü;

$$u'(z(t + ax)) = w'(z(t + ax)) - iw'(iz(t + ax))$$

$$(26.16) = w'(Rez(t+ax)+iImz(t+ax)-iw'(iRez(t+ax))+iw'(Imz(t+ax))$$

$$= (Rez + iImz)w'(t + ax) - i(Rez + iImz)(w'(i(t + ax)) = zu'(t + ax)$$

sağlandığından u' kompleks sayılar üzerinde doğrusaldır. Bu kesinlikle u'yu M üzerinde genişletir, çünkü yukarıdaki aynı özdeşlik, u fonksiyonelini gerçel kısmı w ile ifade eder. Son olarak norm koşulunun sağlandığını görmek için, çok önceden kullanılan,

$$|u'(t + ax)| = Ree^{i\theta}u'(t + ax) = Reu'(e^{i\theta}t + e^{i\theta}ax)$$

(26.17)

$$= w'(e^{i\theta}u + e^{i\theta}ax) \leq ||e^{i\theta}(t + ax)||_V = ||t + ax||_V$$

olacak biçimde tek bir $\theta \in [0, 2\pi)$ olduğunu anımsamak yeterlidir. Bu kanıtı tamamlar.

Hahn Banach Teoreminin kanıtı

Zorn Önteoreminin bir uygulamasıdır. Seçme belitinden Zorn Önteoreminin nasıl elde edildiği ile ilgilenmeyeceğiz. Seçme Belitine inanıyorsanız Zorn önteoremine de inanabilirsiniz.

Zorn Önteoremi sıralı küme üzerinde bir ifadedir. Bir E kümesi üzerindeki kısmı sıralama $E \times E$'nin aşağıdaki koşulları sağlayan bir altkümesidir. (e, f)'nin bu altkümede olmasını $e \prec f$ ile gösterecek olursak,

$$(26.18) \quad e \prec e, \quad e \prec f \quad \text{ve} \quad f \prec e \Rightarrow e = f, \quad e \prec f \quad \text{ve} \quad f \prec g \Rightarrow e \prec g.$$

Kısmi sıralama ile sıralama arasındaki önemli fark herhangi iki öğenin mutlaka karşılaştırılabilir olmamasıdır.

Eğer kümenin her iki elemanı karşılaştırılabilir ise kısmi sıralı bir kümeye *zincir* denir. Bir $D \subset E$ kümesinin bir *üst sınırı*, her $d \in D$ için $d \prec e$ koşulunu sağlayan $e \in E$ elemanıdır. E'nin bir maksimal(en büyük) elemanı $e \prec f$ olduğunda $e = f$ koşulunu sağlayan, $e \in E$ elemanıdır.

Önteorem 21(Zorn) Boş kümeden farklı kısmi sıralı bir kümede her zincirin bir üst sınırı varsa en az bir maksimal elemanı vardır.

Kanıt. $M \subset V$ bir normlu uzayın altuzayı ve $u : M \to \mathbb{C}$ sınırlı bir dönüşüm ve u, M'nin V den kısıtlama ile elde edilen normuna göre sınırlı olsun. Zorn önteoremini E ile göstereceğimiz (v, N) çiftlerine uygulayacağız. Burada (v, N), $M \subset N \subset V$, $v|_M = u$ ve $||v||_N = ||u||_N$ sağlanmaktadır. Başka bir deyişle, v, M altuzayını içeren bir altuzay N uzayına u fonksiyonelinin u ile aynı norma sahip genişlemesidir. Bu küme boş kümeden farklıdır, çünkü (u, M) çiftini içerir ve $N_1 \subset N_2$, $v_2|_{N_1} = v_1$ ise $(v_1, N_1) \prec (v_2, N_2)$ dir. Bunun bir kısmi sıra olduğunu kontrol edebilirsiniz.

C bu genişlemelerin bir zinciri olsun. Yani $(v_i, N_i) \in C$ ise $(v_1, N_1) \prec (v_2, N_2)$ ya da $(v_2, N_2) \prec (v_1, N_1)$ olmalıdır. Buradan

$$(26.19) \quad \widetilde{N} = \cup\{N : \text{bazı } v \text{ için} \quad (v, N) \in C\} \subset V$$

bir doğrusal altuzaydır. Bu birleşim sayılabilir değildir ya da benzeri bir durumu yoktur. Ancak, zincir olma kuralı nedeniyle, bu kümeye ait iki elemandan biri diğerinin içindedir. Benzer biçimde

$$(26.20) \quad \widetilde{v} : \widetilde{N} \to \mathbb{C}, \quad \widetilde{v} = v(x) \quad \text{eğer} \quad x \in N, \quad (v, N) \in C.$$

Verilen bir x için $x \in N$ olacak biçimde bir sürü (v, N) ikilisi vardır. Ancak zincir olma özelliğinden dolayı $v(x)$'nin değeri aynıdır. Dolayısıyla, $\widetilde{v}$ iyi tanımlı ve doğrusaldır. Üstelik $|\widetilde{v}(x)| \leq ||u||_M ||v||_V$ eşitsizliğini sağlayan bir genişlemedir. Yani $(\widetilde{v}, \widetilde{N})$, C'nin bir üst sınırıdır.

Zorn Önteoremi gereği E'nin bir maksimal elemanı vardır. Bunu $(\widetilde{u}, \widetilde{M})$ ile gösterelim. $\widetilde{M} = V$ ise istenilene ulaşılmış olur. Tersi durumunda, $x \in V \setminus \widetilde{M}$ vardır. Önteorem 20 yi $(\widetilde{u}, \widetilde{M})$'nin $(\widetilde{u'}, \widetilde{M'})$ genişlemesine uygulayalım. Dolayısıyla $(\widetilde{u}, \widetilde{M}) \prec (\widetilde{u'}, \widetilde{M'})$. Bu $(\widetilde{u}, \widetilde{M})$'nın maksimal olmasıyla çelişir.□
Zorn Önteoreminin birçok uygulaması vardır. Bunlardan önemli biri aşağıdakidir:

Önerme 33. Herhangi bir normlu uzay V ve $x \in V$ için $f(x) = 1$ ve $||f|| \leq ||x||_V$ olacak biçimde sürekli doğrusal $f : V \to \mathbb{C}$ fonksiyoneli vardır.
Kanıt. M, x tarafından üretilen altuzay olsun ve $u(zx) = z$ olarak tanımlansın. Bu fonksiyonelin normu $||x||_V$ dır. Bunun genişlemesiyle istenilen f elde edilir.