18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

DERS 25.GERÇEL SAYILAR ÜZERİNDE FOURİER DÖNÜŞÜMÜ

Son derste harmonik salınımın özfonksiyonlarının oluşturduğu ortonormal dizinin tamlığını gösterdik. Bu bize Fourier dönüşümünün bazı temel özelliklerinin kanıtlanmasına izin verir. Zaten doğrusal dönüşüm olduğunu biliyoruz.

$$(25.1) \quad L^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}^0_\infty(\mathbb{R}), \quad \overline{u}(\xi) = \int e^{ix\xi} u(x) dx.$$

İlk aşamada Fourier dönüşümünün etkisi zaten gösterildi:

$$(25.2) \quad \mathcal{F}(u_0)(\xi) = \sqrt{2\pi} e_0(\xi).$$

Benzer bir düşünceyle,

$$(25.3) \quad \mathcal{F}(u_j)(\xi) = \sqrt{2\pi} i^j u_j(\xi) \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

$u_j = Cu_{j-1}$ gerceğini kullanarak tümevarımla ilerleyebiliriz. Burada sözü edilen integraller sonsuzda çok hızlı yakınsarlar, dolayısıyla kısmi integralle sorunumuz olmayacaktır.

$$(25.4) \quad \mathcal{F}(\frac{d}{dx} u_{j-1}) = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} e^{-ix\xi} \frac{du_{j-1}}{dx} dx$$

$$= \lim_{T\to\infty} \left(\int_{-T}^{T} ((i\xi)(e^{-ix\xi} du_{j-1} dx + [e^{-ix\xi} u_{j-1}(x)]_{-T}^{T}) \right) = (i\xi)\mathcal{F}(u_{j-1}),$$

$$\mathcal{F}(xu_{j-1}) = i \int \frac{de^{-ix\xi}}{d\xi} u_{j-1} dx = i \frac{d}{d\xi} \mathcal{F}(u_{j-1}).$$

elde edilir. Bunlar kullanılarak, tümevarımda gereksinim duyulan,

$$(25.5) \quad \mathcal{F}(u_j) = \mathcal{F}((-\frac{d}{dx} + x) u_{j-1}) = (i(-\frac{d}{d\xi} + \xi)\mathcal{F}(u_{j-1}) = iC(\sqrt{2\pi} i^{j-1} u_{j-1})$$

elde edilerek, (25.3) kanıtlanır.

Dolayısıyla tüm elemanları $L^1(\mathbb{R})$ olan ve $\mathcal{F}$ dönüşümünün özfonksiyonları olan $L^2(\mathbb{R})$'nın bir ortonormal tabanı bulunur.

Teorem 17. Fourier dönüşü $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ yi $L^2(\mathbb{R})$'ye götürür ve süreklilik nedeniyle, $L^2(\mathbb{R})$ uzayının bir izomorfizmasına genişler. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ unitary bir dönüşümdür ve $\mathcal{F}$ dönüşümünün tersi,

$$(25.6) \quad \mathcal{F}(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi} f(\xi)$$

dönüşümünün $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ den süreklilik gereği genişleyen dönüşümdür.

Kanıt. Aslında bu kanıtlandı. Hermite tabanının elemanları e_j fonksiyonları hem $L^1(\mathbb{R})$ ve hem de $L^2(\mathbb{R})$ içerisindedirler, dolayısıyla $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ise $\mathcal{F}$ altındaki görünüsünü bulmak için L^2 deki iççarpımı hesaplıyarak,

$$(25.7) \quad (\mathcal{F}(u), e_j)) = \int_{\mathbb{R}^2} e_j(\xi) e^{ix\xi} u(x) dx d\xi = \int \mathcal{F}(e_j)(x) u(x) = \sqrt{2\pi} i^j (u, e_j).$$

görürüz. Bessel eşitsizliği $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$ olduğunu gösterir (kuşkusuz, sürekli olduğundan yerel integrallenebilirdir). Geri kalan hususlar kolayca elde edilir.

Bunun yanında Parseval ve Plancherel özdeşliklerini de kanıtladığımızı dikkat ediniz:

$$(25.8) \quad \|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = 2\pi \|u\|_{L^2}, \quad (\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(v)) = 2\pi(u, v), \quad \forall u, v \in L^2(\mathbb{R}).$$

Sobolev uzaylari ve Schwartz uzaylarının tanımlarını ve Fourier dönüşümleriyle olan ilişkisinden bahsedelim.

Önce Sobolev uzaylari: $\mathcal{F}$'nin isomorfik(eşyapı dönüşümü) olarak $L^2(\mathbb{R})$'yi $L^2(\mathbb{R})$'ye götürdüğünü görelim. (25.4) den Fourier dönüşümünün x değişkenine göre türev almayı ξ değişkeni ile çarpmaya dönüştürdüğünü görebiliriz. L^2 uzayındaki fonksiyonların nasıl türevlenebileceğini bilmiyoruz daha doğrusu bu uzayda türevin ne anlama geldiğini anlamaya çalışıyoruz. Matematikçilerin çoğu kez yaptığı gibi istediğimizi bir tanım yaparak netleştirmeye çalışalım.

Tanım 10. Herhangi $s \in (0, \infty)$ için mertebesi s olan Sobolev uzayı $L^2(\mathbb{R})$'nin bir altuzayı olarak şöyle tanımlanır:

$$(25.9) \quad H^s(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \overline{u} \in L^2(\mathbb{R})\}.$$

Buna ek olarak $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$ olarak tanımlanır.

Problem 1. Pozitif mertebeli Sobolev uzaylarının

$$(25.10) \quad \|u\|_s = \left\|(1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}} \overline{u}\right\|_{L^2}$$

normu altında Hilbert uzayı olduklarını gösteriniz.

s arttıkça bu uzaylar küçülürler. $n \geq s$ bir tamsayı ise bir kompakt küme dışında sıfir olan $\mathbb{R}$ da tanımlı n-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlar H^s de yoğundur. Bu süreklilik gereği aşağıdaki önermeyi anlamlı kılar.

Önerme 32 Sınırlı doğrusal dönüşüm

$$\frac{d}{dx} : H^s(\mathbb{R}) \to H^{s-1}(\mathbb{R}), \quad s \geq 1, v(x) = \frac{du}{dx} \Longleftrightarrow \overline{v}(\xi) = i\xi\overline{u}(\xi) \tag{25.11}$$

her $s \leq n$ için kompakt dayanaklı n-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlarda türev kavramı olarak tutarlıdır.

Sobolev uzayları hakkında pek çok önemli sonuçtan biri de "L^2 türevleri" ve " bilindik türev" arasındaki ilişkidir.

Teorem 18 (Sobolev gömmesi). n bir tamsayı ve $s > n + \frac{1}{2}$ ise

$$H^s(\mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^n_\infty(\mathbb{R}) \tag{25.12}$$

n-inci mertebeden türevleri sınırlı, n-kez sürekli türevlenebilir fonksiyonlardan oluşur.

Aslında bunun kanıtı zor değildir. H^s den başka, benzer uzaylar da tanımlanabilir: örneğin x ve ξ değişkenlerini simetrik olarak düşünüp,

$$H^s_{iso}(\mathbb{R}) = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\overline{u} \in L^2(\mathbb{R}), (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}u \in L^2(\mathbb{R})\}. \tag{25.13}$$

uzayları tanımlanabilir.

Problem 2. $H^s_{iso}(\mathbb{R})$ uzaylarını Hilbert uzayı yapacak uygun bir norm tanımlayınız.

Problem 3. Harmonik salınımı süreklilikle $H^s_{iso}(\mathbb{R})$

$$H : H^{s+2}_{iso} \to H^s_{iso}(\mathbb{R}), \forall \quad s \geq 2 \tag{25.14}$$

izomorfizmasına genişleyeceğini gösteriniz.

Hilbert uzaylarının, hatta Banach uzaylarının yolun sonu olmadığını söylemek isterim. Bu bağlamda, Fourier dönüşümleriyle ilişkili önemli uzaylardan biri Schwartz uzayıdır. Tanımı basittir. Schwartz uzaylarını $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ile göstereceğiz ve

$$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}.$$

(25.15) her n için sürekli türevlenebilir ve,

$$\|u\|_n = \sum_{k+p\leq n} \sup_{x\in\mathbb{R}} (1+|x|)^k \left|\frac{d^p u}{dx^p}\right| < \infty.$$

Bütün bu eşitsizlikler u'nın bütün türevlerinin, herhangi bir polinomla çarpıldığında sonlu kalmaları anlamında, "∞'de hızla azaldığı" anlamındadır.

Her j için Hermite tabanının öğeleri e_j'ler $\mathcal{S}(\mathbb{R})$'nin elemanları olduğundan $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ boş kümeden farklıdır.

(25.5) den anlaşılacağı gibi bu uzaylar Banach uzaylarına benzemezler. $\|.\|_n$ lerin herbiri normdur. Ancak, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bu normların hiçbirine göre tam değildir. Üstelik bu sayılabilir sayıdaki normların hepsinin belirlediği topolojiye göre tamdır. Bu ne anlama gelmektedir? Aslında $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(25.16) \quad d(u,v) = \sum_n 2^{-n} \frac{\|u-v\|_n}{1+\|u-v\|_n}$$

metriğine göre metrik uzaydır, bunu kontrol edebilirsiniz. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ uzayının bu metriğe göre tam olduğunu göstereceğiz. Böylesi bir uzaya Frechet uzayı denir.

Bunun Fourier dönüşümüyle ne alakası olduğu sorusuna gelince: Buradaki nokta

$$(25.17) \quad \mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{bir izomorfizmadır ve} \quad \mathcal{F}(\frac{du}{dx}) = i\xi\mathcal{F}(u), \mathcal{F}(xu) = -i\frac{d\mathcal{F}(u)}{d\xi}.$$

nerede anlamlı ise, geçerlidir. Sobolev gömme teoremi

$$(25.18) \quad \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \int_n H^s_{iso}(\mathbb{R})$$

ifadesini gerektirir. $\mathcal{S}(\mathbb{R})$'nın duali $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ile gösterilir ve $\mathbb{R}$ üzerindeki dağılımlardır.