18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 22. DİRİCHLET PROBLEMİNE DEVAM

Gecen derste bitiremediğim kanıtı tamamlamak istiyorum.

Kanıt.(21.25) de verilen V'nin $V \geq 0$ durumuna karşılık gelen çözüme dikkat ediniz. Genelde, $V + c \geq 0$ sağlayan c sayısını seçebiliriz. Bu durumda denklem

$$\frac{-d^2w}{dx^2} + Vw = Tw_k \Leftrightarrow \frac{-d^2w}{dx^2} + (V+c)w = (T+c)w \tag{22.1}$$

haline gelir. Böylece, eğer w bu özdeğer denklemini sağlarsa aşağıdaki denklemi de sağlayacaktır;

$$(22.2) w = (T+c)A(Id + A(V+c)A)^{-1}Aw \leftrightarrow Sw$$

$$= (T+c)^{-1}w, S = A(Id + A(V+c)A)^{-1}A$$

Daha önce S dönüşümünün $L^2(0, 2\pi)$ uzayı üzerinde kompakt ve özeşlenik olduğunu kanıtladığımızdan, onun tam olan özfonksiyonları olduğunu ve bunlara karşılık gelen özdeğerlerin $\tau_k \neq 0$ sağladıklarını biliyoruz. Yukarıdaki akıl yürütmeden her bir e_k'nın esasında sürekli olduğunu da biliyoruz- çünkü bunlar $w' \in L^2(0, 2\pi)$ olmak üzere Aw' biçimindedirler ve dolayısı ile iki-kez sürekli türevlenebilirdirler. Dolayısı ile bu e_k lar gerçekten özdeğer problemini (Dirichlet sınır koşulları ile) sağlarlar ve özdeğerleri $k \to \infty$ iken

$$T_k = \tau_k^{-1} + c \to \infty \tag{22.3}$$

sağlar. Çözülebilme kısmı da aynen yukarıdaki gibi yapılır.$\square$