18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

## Ders 20. ÖZFONKSİYONLARIN TAMLIĞI

$A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ ayrılabilir bir Hilbert uzayında kompakt dönüşüm olsun. $A$ kompakt olmasa bile

$$(20.1) \quad Nul(A) \subset \mathcal{H}$$

altkümesinin kapalı, dolayısıyla $Nul(A)^{\perp}$ bir Hilbert uzayı-sonlu boyutlu olabilir- ($A = 0$ durumunda bunun ilginç bir durumu yoktur).

**Theorem 15.** Ayrılabilir bir Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ için, $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ özeşlenik, kompakt bir dönüşüm, $A^* = A$ ise $null(A)^{\perp}$ nın $A$'nın özfonksiyonlarından oluşan bir ortonormal tabanı vardır-$j \to \infty$ için $\lambda_j \to 0$, $|\lambda_j|$ artmayan bir dizi olmak üzere $u_j$ ler

$$(20.2) \quad Au_j = \lambda_j u_j, \quad \lambda_j \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

olarak ayarlanabilir.$Null(A)^{\perp}$ sonlu boyutlu ise, dizi sonlu bir dizidir.

Bunun kanıtını vermeden önce "Fredholm Alternatifi" olarak bilinen kullanışlı sonuçlarını verelim.

**Sonuç 4.** Ayrılabilir bir Hilbert uzayında $A \in \mathcal{K}(\mathcal{H})$ özeşlenik kompakt dönüşüm ise

$$(20.3) \quad u - Au = f$$

eşitliğinin her $f \in \mathcal{H}$ için ya tek çözümü vardır ya da

$$(20.4) \quad u - Au = 0$$

eşitliğinin çözümü aşikar olmayan sonlu boyutlu uzaydır ve (20.3) eşitliğinin çözümü olması için gerekli ve yerli koşul $f$'nin bütün çözümlere dik olmasıdır.

**Kanıt.** Bu $Id - A$ dönüşümünün sıfır uzayının kapalı görüntü kümesine dik olmasıdır. Dolayısıyla $Id - A$ tersinir olup-olmamasından bağımsız olarak görüntü kümesi tam olarak $Null(Id - A)$ nın diktümleyenidir. Bu çerceveden bakıldığında, görüntü altuzayı sıfır uzaya her zaman diktümleyen olduğundan, çok fazla alternatif olmadığı düşünebilir.$\square$

**Önteorem** Ayrılabilir bir Hilbert uzayında (sonlu boyutlu da olabilir) $A \in \mathcal{H}(\mathcal{A})$ özeşlenik kompakt dönüşüm ise

$$(20.5) \quad F(u) = (Au, u), \quad F : \{u \in \mathcal{H} : \|u\| = 1\} \to \mathbb{R}.$$

fonksiyonu birim küme üzerinde supremum ve infimum değerini alan sürekli bir fonksiyondur. Üstelik maksimum yada minumumu sıfır değil ise, bu, $A$'nın bir özvektöründe alınan, özdeğerdir.

**Kanıt.** $F(u)$ sonlu boyutlu uzaylarda bir fonksiyon gibi görünse de öyle değildir. Öncelikle $A$'nın özeşlenik olmasından dolayı

$$(20.6) \quad \overline{(Au,u)} = (u, Au) = (A^*u, u) = (Au, u)$$

olduğundan $F$ gerçekten gerçel değerlidir. $A$'nın ve iççarpımın sürekliliğinden ve aşağıdaki gerektirmeden

$$(20.7) \quad |F(u) - F(u')| \leq |(Au,u) - (Au,u')| + |(Au,u') - (Au',u')| \leq 2\,\|A\|\,\|u - u'\|$$

dır (çünkü $u$ ve $u'$ nın normları birdir) dolayısıyla $F$ süreklidir.

Sonlu boyutta, küre kompakt ve bir kompakt kümede sürekli fonksiyon maksimum ve minumum değerini alacağından kanıt biterdi. Genel durum için $A$'nın kompaktlığı kullanılacak. $F$ kesinlikle sınırlıdır.

$$(20.8) \quad |F(u)| \leq \sup_{\|u\|=1} |(Au,u)| \leq \|A\|\,.$$

Böylece $F(u_n^+) \to \sup F$ ve $F(u_n^-) \to \inf F$ olacak biçimde $u_n^+$ ve $u_n^-$ dizileri vardır. Zayıf kompaktlıktan altdiziye geçerek $u_n^+ \to u^+$ ve $u_n^- \to u^-$ zayıf yakınsadıklarını varsayabiliriz. $A$'nın kompaktlığından $Au_n^+ \to Au^+$, $Au_n^- \to Au^-$ yakınsamaları kuvvetlidir, yani normda yakınsarlar. Bu durumda

$$(20.9) \quad \left|F(u_n^\pm) - F(u_n^\pm)\right| \leq \left|A(u_n^\pm - u^\pm), u_n^\pm)\right| + \left|A(u^\pm, u_n^\pm - u^\pm)\right|$$

$$= \left|A(u_n^\pm - u^\pm), u_n^\pm)\right| + \left|(u^\pm, A(u_n^\pm - u^\pm))\right| \leq 2\left\|Au_n^\pm - Au^\pm\right\|$$

ifadesinden $F(u^+) = \lim F(u^+)$ ve $F(u^-) = \lim F(u^-)$ sırasıyla $F$'nin supremum ve infumumlarıdır. Böylece sonlu boyutda olduğu gibi supremum ve infumum değerleri sırasıyla maksimum ve minumum değerlerdir.

Dolayısıyla $\Lambda^+ = \sup F > 0$ olduğunu varsayabiliriz. Bu durumda $v \perp u^+$ olan her $v \in \mathcal{H}$ için aşağıdaki eğri

$$(20.10) \quad L_v : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R} \quad L_v(\theta) = cos\theta u^+ + sin\theta v$$

birim kürenin içerisindedir. Hesapla

$$(20.11) \quad F(L_v(\theta)) = (A(L_v(\theta), L_v(\theta)) = cos^2\theta F(u^+) + 2sin(2\theta)Re(Au^+, v) + sin^2(\theta)F(v),$$

. Bu fonksiyonun $\theta = 0$ noktasında maksimum değer aldığını biliyoruz. Bu fonksiyonun $(\pi, -\pi)$ aralığında kesinlikle türevlenebilir ve türevi süreklidir). O noktada türevi $Re(Au^+, v)$, dolayısıyla sıfırdır. Aynı durum $v$ yerine $iv$ alınması durumunda da doğrudur, dolayısıyla, aslında

$$(20.12) \quad (Au^+, v) = 0 \quad \forall v \perp u^+, \quad \|v\| = 1.$$

Bu $v$'ler tarafından gerilen uzay alınırsa $v \perp u^+$ olan her $v$ için $(Au^+, v) = 0$ dolayısıyla $A^+u$, $u^+$ nın bir gerçel katı olmalıdır. Bunun $F$'nın tanımı içinde değerlendirilmesiyle $Au^+ = \Lambda^+ u^+$, özdeğeri $\Lambda^+ = \sup F$ olan, özvektördür.

Aynı fikir $\inf F$ negatif ise uygulanır, örneğin $A$, $-A$ ile değiştirilebilir. Bu önteoremin kanıtını tamamlar.

*Teorem 15'nin kanıtı* Öncelikle $\mathcal{H}_0 = Nul(A)^\perp \subset \mathcal{H}$ Hilbert uzayını ele alalım. Bu durumda

$$(20.13) \quad (Au, v) = (u, Av) = 0 \quad \forall u \in \mathcal{H}_0, v \in Nul(A) \Rightarrow Au \in \mathcal{H}_0,$$

olduğundan $A$, $\mathcal{H}_0$ uzayını kendisine götürür.

Üstelik $A$'nın $\mathcal{H}_0$ uzayına kısıtlanışı olan $A_0$ kompakt dönüşümdür-kompakt olmasının nedeni, $B(0,1) \subset \mathcal{H}_0$ için $A(B(0,1))$ kümesinın birim kürenin görüntüsünden daha küçük olmasındandır(aslında eşittirler).

Kuadratic formu $F_0$ olan $A_0$ dönüşümününe Önteoremi uygulayarak bir özvektör buluruz. $\sup_{A_0} < -\inf_{F_0}$ olmadıkca, bu özvektör, $\sup_{A_0}$ karşılık gelsin-diğer durumda inf karşılık getirilir. $F_0 = 0$ olmadıkca bu yapılanda hiçbir hata yoktur. Üstelik,

**Önteorem 15** Bir Hilbert uzayında, genelde, özeşlenik dönüşüm için

$$(20.14) \quad F \equiv 0 \Leftrightarrow A \equiv 0.$$

**Kanıt.** İlkesel olarak $F$ sadece birim kürede tanımlanır, fakat elbette, buradan her $u \in \mathcal{H}$ için $(Au, u)$ elde edebiliriz. Yani, $u = 0$ durumunda bu elbette sıfırdır ve diğer durumda

$$(20.15) \quad (Au, u) = \|u\|^2 F(\frac{u}{\|u\|}).$$

$A$ yı kutupsal olarak ifade edebiliriz.

$$(20.16) \quad 2(Au, v) = (A(u+v), u+v) + i(A(u+iv, u+iv).$$

Bu $F \equiv 0$ ise $A \equiv 0$ olduğunu gösterir□

Dolayısıyla $A \equiv 0$ olmadıkça bir özvektör bulabiliriz-$A \equiv 0$ durumunda $Nul(A) = \mathcal{H}$ dır. Şimdi tümevarım kullanabiliriz. $A$ için normları bir olan birbirlerine dik $e_j$ özvektörleri ve özdeğerleri $\lambda_j$ olmak üzere

$$(20.17) \quad \mathcal{H}_N = \{u \in \mathcal{H}_0 = Nul(A)^\perp : (u, e_j) = 0, j = 1, 2, ..., N\}$$

olacak biçimde bir $N$'nın olduğunu varsayalım. Yukarıdaki tartışmadan dolayı,

$$(20.18) \quad u \in \mathcal{H}_N \Rightarrow (Au, e_j) = (u, Ae_j) = \lambda_j(u, e_j) = 0 \quad \text{olduğundan} \quad u \in \mathcal{H}_N \Rightarrow Au \in \mathcal{H}_N,$$

böylece $A$ dönüşümü $\mathcal{H}_N$ uzayını kendisine götürür.

Üstelik bu kısıtlanmış dönüşüm $\mathcal{H}_N$ de kompakt ve özeşleniktir. Dolayısıyla, $\mathcal{H}_N$ da kısıtlanmış dönüşümün özdeğeri $F$'nın maksimum ya da minumumu olan bir özvektörünü bulabiliriz. Problem, herhangi bir yerde, $F = 0$ olduğu zaman oluşabilir, fakat bu durumda $\mathcal{H}_N$ üzerinde $A \equiv 0$ ve $\mathcal{H}_N \perp Nul(A)$ olduğundan $\mathcal{H}_N = \{0\}$ elde edilir, dolayısıyla $\mathcal{H}_0$ sonlu boyutlu olmak zorundadır.

Buradan ya $\mathcal{H}_0$ sonlu boyutludur ya da özdeğerleri ($|\lambda_i|$) artmayan olacak biçimde, $\mathcal{H}_0$ da $A$'nın özvektörlerinin sonsuz bir ortonormal $(e_i)$ dizisini elde edilebiliriz- çünkü birbirlerini izleyen $F_N$ ler bir öncekinin kısıtlaması olup maksimim ve minumumları sıfıra daha çok yaklaşmaktadırlar, en azından sıfırdan uzaklaşmamaktadırlar. Aslında bu durumda $\lambda_i \to 0$ dır, çünkü diğer durumda $\lambda \neq o$ gibi bir özdeğere karşılık gelen özvektörlerin uzayının sonsuz boyutlu olması gerekir bu ise, son olarak gösterildiği gibi, $\lambda(Id - \lambda^{-1}A)$ dönüşümünün sıfır uzayının sonlu boyutlu olma durumuna aykırıdır.

Sonuçta, bu ortonormal dizi neden $\mathcal{H}_0$'nın bir ortonormal tabanıdır? Eğer değilse, inşa edilen $(e_i)$ dizisi tarafından üretilen uzayın kapanışı $\mathcal{H}'$, ve bu uzayın $\mathcal{H}_0$ da diktümleyenini-bu aşikar olmayabilir- bulabiliriz. Daha önceki gibi, $F$ nin bu uzaya kısıtlanışına $F'$, $A$ nın da kısıtlanışına $A'$ dersek, yine özeşlenik kompakt bir dönüşüm elde ederiz. Dolayısıyla $F'$ sıfır değil ise, $F'$ sıfırdan farklı özdeğeri olan özvektörünü bulabiliriz. Bu ise her zaman, en azından, mutlak değerde en büyük olan özdeğer seçmemize ters düşer. Böylece $F' \equiv 0$ dolayısıyla $A' \equiv 0$ ve özvektörler $Nul(A)^\perp$'nın bir ortonormal tabanıdır. Bu Teoremin kanıtını tamamlar$\square$.