18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 18. KOMPAKT DÖNÜŞÜMLER

Geçen derste izi sonlu boyutlu dönüşümlerin yanısıra ayrılabilir bir Hilbert uzayı üzerindeki sınırlı dönüşümlerden oluşan dönüşüm cebiri $B(\mathcal{H})$ ele aldık. Izi sonlu boyutlu dönüşümler hem bir ideal hem de eşlenik alma altında kapalıdırlar. Izi sonlu dönüşümlerin norm-limitlerinden oluşan dönüşümler de bir ideal oluştururlar. Bu ideal de norm ve eşlenik alma altında kapalıdır.

Tanım $\mathcal{H}$ ayrılabilir bir Hilbert uzayı olmak üzere, $K \in B(\mathcal{H})$ kompakt dönüşüm olması bu dönüşüm altında kapalı birim yuvarın izinin önkompakt olmasıdır. Yani,kapanışı kompakt bir kümedir- $K\{u \in \mathcal{H} : ||\sqcap|| \leq \infty\}$ kümesinin kapanışı kompakttır.

Önteorem 12 Bir $K \in B(\mathcal{H})$ dönüşümünün kompakt olması için yeter ve gerek koşul, zayıf yakınsayan her (u_n) dizisinin izi $K(u_n)$'nin norm yakınsamasıdır.

Kanıt Önce (u_n) dizisinin zayıf yakınsayan bir dizi ve K dönüşümünüm kompakt olduğunu varsayalım. (u_n) dizisi norm sınırlı, yani $||u_n|| \leq C$ olduğundan Ku_n dizisi $CKB(0,1)$ içindedir.(Kuşkusuz D kümesi kompakt ise, her c sabiti için cD kümesi de kompakttır.) Böylece Ku_n dizisinin her altdizisinin yakınsayan bir altdizisi olduğunu ve limitin ise Ku olduğunu elde ederiz.(bu esasında her sınırlı dönüşüm için geçerli olan bir özelliktir: görmek için sadece

$$(Ku_n, v) = (u_n, K^*v) \to (u, K^*v) = (Ku, v)) \tag{18.1}$$

hesaplamak yeterlidir. Ancak bir metrik uzayda her altdizinin aynı limite yakınsayan altdizisinin varlığı dizinin yakınsamasını gerektirir(bunu anımsamıyorsanız, işte bir anımsatma: bir (v_n) v noktasına yakınsamasın. Bir $\epsilon > 0$ sayısı için $d(v_{n_k}, v) \geq \epsilon$ sağlayan altdizi vardır. Ancak bu her altdizisinin sabit bir v'ye yakınsadığı altdizisi olan bir dizi için olanaksızdır.

Ters yöndeki kanıt için K dönüşümünün zayıf yakınsayan dizileri normda yakınsayan dizilere dönüştürdüğünü kabul edelim. Göstermek istediğimiz $K(B(0,1))$ kümesinin kapanışının kompakt olduğudur. Ancak bu $K(B(0,1))$ kümesindeki her dizinin normda yakınsayan bir altdizisi olmasına denktir-burada limitin kümede olup, olmaması sorun değildir. Böylesi bir dizi u_n, öğeleri $B(0,1)$ yuvarından olmak üzere Ku_n biçimindedir. Ancak birim yuvarın zayıf kompakt olduğunu biliyoruz, yani bir u vektörüne zayıf yakınsayan u_{n_j} altdizisi bulabiliriz. Önteoremin'nın varsayımından, Ku_{n_j} dizisinin normda Ku yakınsadığını biliyoruz. Dolayısı ile gerçekten u_n dizisinin yakınsayan bir altdizisi vardır ve $K(B(0,1))$ kümesinin kapanışı kompaktır.$\square$

Önerme 25 Ayrık Hilbert uzayı $\mathcal{H}$ üzerindeki $K \in B(\mathcal{H})$ dönüşümünün kompakt olması için gerek ve yeter koşul izi sonlu bir dönüşüm dizisinin norm limiti olmasıdır. Başka bir deyişle kompakt dönüşümler ideali, izi sonlu olan dönüşümler idealinin norm kapanışıdır.

Kanıt. İlk yapmamız gereken kompakt bir dönüşümün izi sonlu dönüşümlerden oluşan bir dizinin norm limiti olduğunu göstermektir. Bunun için ayrılabilir bir Hilbert uzayın kompakt altkümelerinin-daha önce gördüğümüz- bir betimlenişini kullanacağız. Buna göre eğer e_i, $\mathcal{H}$ uzayı için bir ortonormal taban ise $I \subset \mathcal{H}$ altkümesinin kompakt olması için gerek ve yeter koşul I'nın kapalı, sınırlı ve her $\epsilon > 0$ için

$$(18.2) \qquad \sum_{i>N} |(v, e_i)|^2 < \epsilon^2, \forall v \in I$$

sağlamasıdır. Şimdi bunu, K kompakt bir dönüşüm olmak üzere $K(B(0,1))$ kümesine uygulayacağız. $K(B(0,1))$ kümesi kompakt bir küme içindedir, dolayısı ile (18.2) buna uygulanabilir. Yani, her $\epsilon > 0$ için öyle n vardırki

$$(18.3) \qquad \sum_{i>N} |(Ku, e_i)|^2 < \epsilon^2, \forall u \in H, ||u|| \leq 1$$

her n için bu serilerin ilk kısımlarını düşünelim ve

$$(18.4) \qquad K_n u = \sum_{k \leq n} (Ku, e_i) e_i$$

tanımlıyalım. Bu dönüşüm doğrusal ve izi sonludur- çünkü izi (e_i) dizisinin ilk n öğesinin gerdiği uzay içinde kalmaktadır. Ancak bu bir ortonormal taban olduğundan,

$$(18.5) \qquad ||Ku - K_n u||^2_{\mathcal{H}} = \sum_{i>n} |(Ku, e_i)|^2$$

(18.3), $||Ku - K_n u|| \leq \epsilon$ olduğunu gösterir. Artan n ile $||Ku - K_n u||$ küçüldüğünden, verilen $\epsilon > 0$ için bulunacak n ve ondan büyük N değerleri için

$$(18.6) \qquad ||K - K_N||^2_{\mathcal{B}(\mathcal{H})} = sup_{||u|| \leq 1} ||Ku - K_n u|| \leq \epsilon$$

sağlanır. Dolayısı ile gerçekten norm'da $K_n \to K$ ve kompakt operatörler sonlu ranklı dönüşümlerin norm kapanışında bulunmaktadırlar.

Şimdi tersine T_n dönüşümleri sonlu ranklı olmak üzere T_n dönüşümlerinin norm'da K dönüşümüne yakınsadığını varsayalım- burada izlerin sonlu olmaları dışında iz hakkında başka bir şey bilmiyoruz. Göstermek istediğimiz K dönüşümünün kompakt, yani $KB(o,1)$ kümesinin önkompakt olmasıdır. Bu küme K dönüşümünün normu ile sınırlıdır. Ayrılabilir bir Hilbert uzayında kompakt kümeleri betimleyen daha önceki bir sonuç'tan ötürü $KB(0,1)$ kümesinde zayıf yakınsayan her dizinin norm yakınsayan bir altdizisi olduğunu göstermek yeterli olacaktır. Burada limitin $KB(0,1)$ kümesinde olması gerekmez sadece varlığı, $KB(0,1)$ kümesinin kapanışının kompaktlığı için yeterli olacaktır. Dolayısı ile v_k, $KB(0,1)$ içinde zayıf yakınsayan bir dizi olsun. Bu dizi, u_k lar birim yuvarda olmak üzere Ku_k biçiminde olacaklardır. Birim yuvar zayıf topolojide kompakt olduğundan bu dizinin bir u vektörüne yakınsayan altdizisi olacaktır ama bu yakınsayan altdiziyi de u_k ile gösterirsek, $u_k \to u$ zayıf yakınsaması vardır. Şimdi tüm T_n dönüşümleri sonlu izli olduğundan her n için, $k \to \infty$ iken $(T_n v_k)$ normda yakınsamalıdırlar- sonlu boyutlu bir uzayda $(T_n v_k, w) = (v_k, T_n^* w)$ zaten sağlandığından, üçgen eşitsizliği ve dönüşüm normunun tanımından

$$(18.7) ||Kv_k - Kv_l|| \leq ||Kv_k - T_n v_k|| + ||T_n v_k - T_n v_l|| + ||T_n v_l - Kv_l||$$

$$\leq 2||K - T_n|| + ||T_n v_k - T_n v_l||$$

Şimdi verilen $\epsilon > 0$ için n yeterince büyük seçilerek $||K - T_n|| < \epsilon/3$ sağlanır. Böylece n sabitlendikten sonra, aynı n için $T_n v_k$ dizisinin Cauchy dizisi olduğu kullanılarak her $k, l > p$ için $||T_n v_k - T_n v_l|| \leq \epsilon/3$ sağlatan p tamsayısı belirlenir. Şimdi (18.7) den Tv_k dizisinin Cauchy dizisi olduğu elde edilir. Hilbert uzayının tamlığından bu Cauchy dizisinin yakınsadığı ve böylece K dönüşümünün kompaktlığı elde edilir.$\square$

Buradan kompakt dönüşümler idealinin kapalı olduğu elde edilir- bunu doğrudan yukarıdan görebileceğiniz gibi sonlu ranklı dönüşümlerin kapanışı olmalarından da elde edebilirsiniz.

PROBLEMLER 8'İN ÇÖZÜMLERİ

Problem 8.1 Sürekli bir fonksiyon $K : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$'nın her $x \in [0,1]$ için $K(x) \in L^2(0,2\pi)$ nın Fourier serisinin düzgün yakınsadığını gösteriniz, yani: $K_n(x)$, $|k| \le n$ üzerinde Fourier serisinin toplamı ise $K_n : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$ süreklidir ve

$$\sup_{x\in[0,1]} \|K(x) - K_n(x)\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0. \tag{18.8}$$

İp ucu: Daha önce kanıtı verilen Hilbert uzayında bir kompaktlık özelliğini kullanınız.

Problem 8.2 Çekirdeği $K \in C([0,1]^2)$ olan $L^2(0,1)$ de tanımlı integral dönüşümünü ele alalım, yani

$$T(u)(x) = \int_{(0,1)} K(x,y)u(y). \tag{18.9}$$

T'nın L^2 de sürekli olduğunu ve sonlu ranklı dönüşümlerin norm kapanışında olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Önceki problemi kullanınız. Bu şekilde tanımlanan sürekli fonksiyon K için, $x \in [0,1] \to K(x,.) \in C([0,1])$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ve böylece $K : [0,1] \to L^2(0,1)$ sürekli, dolayısıyla az önceki problem aralık yeniden ayarlanarak uygulanır.

Daha detaylı bir yardımcı görüş: $K(x,y)$ yi $L^2(0,1)$ de değer alan x değişkenli bir fonksiyon olarak ele alabiliriz. $K_n(x,y)$ önceki problemde verilen değişkenleri x,y olan fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun n noktasında y değişkenine göre Fourier serisinin budanmış halini alalım. Bu fonksiyonun $L^2(0,1)$ de sonlu ranklı bir dönüşüm tanımladığını gösteriniz. Sürekli fonksiyonlarda değer aldığı kuşkusuz. Ama aynı zamanda görüntüler kare integrallenebilir. Buradaki fikir n büyüdükçe fark dönüşümünün olan $K - K_n$ dönüşüm normunun sıfıra gitmesidir. Bunu göstermek açıklayıcı olabilir. Diğer durum için x ve y lerin rolleri değiştirilir.

Problem 8.3 Bir değişkenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara odaklanılmasına karşın, bir yerde, örtme önteoremi 2 boyut için kanıtlandı. Burada yapılan tartışmayı iki boyuta taşımaktı. $L^2((0,2\pi)^2)$ nin bir Hilbert uzayı olduğunu gösterdiğinizi varsayalım. Kanıt için bilmedikleriniz bir listesini yaparak $\frac{exp(ikx+iyl)}{2\pi}$, $(k,l \in \mathbb{Z})$ fonksiyonlarının tam ortonormal taban olduğunun gösterilmesidir.