18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

Problem 7.1 Fourier tabanı $exp(ikx)/\sqrt{2\pi}$ nın tam olduğu hesap ile gösterilebilir mi? Belki. Aşağıdaki sorular sizi yönlendirmek içindir. Sabit bir $t \in (0, 2\pi)$ değeri için

(1)

$$(16.17) \quad 0 \leq x < t \quad \text{için} \quad f_t(x) = 1, \quad \text{ve} \quad t \leq x \leq 2\pi \quad \text{için} \quad f_t(x) = 0$$

basamak fonksiyonlarının $c_k(t) = \int_{(0,2\pi)} f_t e^{-ikx}$ Fourier katsayılarını bulunuz.

(2) Fourier serisinin $L^2(0, 2\pi)$ uzayında f_t fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşulun

$$(16.18) \quad 2\sum_{k>0} |c_k(t)|^2 = 2\pi t - t^2, t \in (0, 2\pi)$$

olduğunu gösteriniz.

(3) Bu koşulu Fourier serisi türünden yazınız ve Fourier serisinin tamlığının terimleri k^{-2} ve k^{-4} lerden oluşan toplamlar türünden ifade edilebileceğini gösteriniz.

(4) Ters yönde giderek, yukarıdaki iki serinin toplamlarını kullanarak, Fourier bazının tamlığını nasıl elde edebileceğimizi açıklıyabilir misiniz?Burada gerçekten çok ince bir nokta var, bakalım bu ince hususu görebilecek misiniz?

Problem 7.2 Seçilecek uygun d_k sabitleri için $d_k sin(kx/2), k \in \mathbb{N}$ fonksiyonlarının $L^2(-2\pi, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduğunu gösteriniz.

İp ucu : Yapılacak iş $d'_k exp(ikx/2), k \in \mathbb{Z}$ fonksiyonlarının $L^2(0, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduklarını göstermek ve sonra bu fonksiyonları tek fonksiyon olarak $(0, 2\pi)$ aralığından $(-2\pi, 2\pi)$ aralığına genişletmektir.

Problem 7.3 (e_k) dizisi ayrılabilir H Hilbert uzayında ortonormal bir taban olsun. $S : H \to H$ ve

$$(14.19) \quad Se_j = e_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$$

sağlayan biriçik sınırlı doğrusal dönüşüm olduğunu gösteriniz. Eğer $B : H \to H$ sınırlı ve doğrusal bir dönüşüm ise $S + \epsilon B$ dönüşümünün bir ϵ_0 için ϵ'nun, $\epsilon < \epsilon_0$ değeri için tersinir olmadığını gösteriniz.

İp ucu : $Lu = (Bu, e_1)$ ile tanımlanan doğrusal fonksiyonel $L : H \to \mathbb{C}$ düşünelim. $B'u = Bu - (Lu)e_1 : H \to H_1 = \{u \in H : (u, e_1) = 0\}$ doğrusal bir dönüşümdür. Kimi küçük ϵ'lar için $S + \epsilon B$ dönüşümünün tersinir olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak $S + \epsilon B$ dönüşümünün H uzayından kendisine bir izomorfizma olamıyacağını gösteriniz.Bunu yaparken ya e_1 vektörünün iz uzayında olmadığını veya çekirdek uzayında sıfırdan farklı bir vektör olduğunu gösterebilirsini.

Problem 7.4 Bir Hilbert uzayında sınırlı dönüşümlerin çarpımların noktasal yakınsama topolojisinde sürekli olduğunu gösteriniz. Başka bir deyişle eğer A_n ve B_n noktasal olarak A ve B dönüşümlerine yakınsıyorlarsa , yani $A_n x \to Ax$,$B_n x \to Bx$ ise $A_n B_n$ dönüşümleri AB dönüşümüne noktasal yakınsar.

18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

Ders 17. SINAV SORULARI ve ÇÖZÜMLERİ

(1) H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bu uzayın iççarpımını $(.,.)$, normunu $||.||$ ile gösterelim. H uzayındaki (u_n) dizisinin zayıf yakınsaması H uzayındaki her v için (u_n, v) dizisinin $\mathbb{C}$ içinde Cauchy dizisi olması demektir.
(a) $||u_n||_H$ dizisinin neden sınırlı olduğunu açıklayınız.
Çözüm: Her $u_n \in H$ için H üzerinde

$$(17.1) \quad T_n(v) = (v, u_n), ||T_n|| = ||u_n||, T_n : H \to \mathbb{C}$$

sağlayan sürekli doğrusal fonksiyonel tanımlar. Sabit v için $T_n(v)$ dizisi $\mathbb{C}$ içinde Cauchy ve dolayısı ile sınırlıdır. Düzgün Sınırlılık Teoemi ile $(||T_n||)$ dizisinin sınırlılığını, buradan da $||u_n||$ dizisinin $\mathbb{R}$ içinde sınırlılığını elde ederiz.
(b) Her $v \in H$ için $(u_n, v) \to (u, v)$ sağlayan $u \in H$ öğesinin bulunabileceğini gösteriniz.
Çözüm. (v, u_n) dizisi $\mathbb{C}$ içinde Cauchy olduğundan, her sabit $v \in H$ için yakınsaktır. Eğer

$$(17.2) \quad Tv = lim_{n\to\infty}(v, u_n)$$

ise, böylece tanımlanan T dönüşümü doğrusaldır. Çünkü,

$$(17.3) \quad T(c_1v_1 + c_2v_2) = lim_{n\to\infty}c_1(v_1, u_n) + c_2(v_2, u_n) = c_1Tv_1 + c_2Tv_2$$

. $C = sup||u_n||$. tanımlandığında, $|Tv| \leq C||v||$ sağlandığından T aynı zamanda sınırlıdır. Dolayısı ile Riesz Temsil Teoreminden bulunabilecek bir $u \in H$ için $Tv = (v, u)$ sağlanır. Buradan da T nin tanımı gereği

$$(17.4) \quad (u_n, v) \to (u, v), \forall v \in H$$

elde edilir.
(c) Eğer (e_i) bir orthonormal dizi ise, her j için (u_n, e_j) dizisinin H içinde yakınsadığı fakat u_n dizisinin zayıf yakınsak olmadığı bir u_n dizisinin bulunabilmesini açıklayınız.
Çözüm. Böylesi bir dizinin örneği $u_n = ne_n$ dizisidir. Kuşkusuz her $i > n$ için $(u_n, e_i) = 0$ olduğundan sıfıra yakınsayacak ancak $||u_n||$ sınırlı olmayacaktır. Dolayısı ile yukarıdaki ilk kısımdan zayıf yakınsayamaz.

(d) Eğer e_i orthonormal bir taban ise, $||u_n||$ dizisinin sınırlılığını, ve her j için (u_n, e_j) yakınsıyor ise u_n dizisinin zayıf yakınsadığını gösteriniz.

Çözüm. Varsayım olarak verilen (u_n, e_j) dizisinin her j için yakınsamasından, e_j vektörlerinin sonlu doğrusal bileşimi olan v vektörleri için (u_n, v) dizisinin de yakınsaması elde edilir.Genel bir $v \in H$ için, e_j orthonormal tabanına göre v nin Fourier-Bessel serisi olan

$$(17.5) \quad v = \sum_k (v, e_k) e_k$$

her v_k vektörünün e_j serisinin yakınsaması vektörlerinin gerdiği sonlu boyutlu vektör uzayında olduğu ve $v_k \to v$ sağlayan v_k dizisini verir. Şimdi Cauchy eşitsizliğini uygulayarak,

$$(17.6) \quad |(u_n, v) - (u_m, v)| \leq |(u_n, v_k) - (u_m, v_k)| + |(u_n, v - v_k)| + |(u_m, v - v_k)|$$

.

Verilen $\epsilon > 0$ için, $||u_n||$ dizisinin sınırlılığı yukarıdaki ifadedeki son iki terimin k yeterince büyük seçilerek $\epsilon/4$ den küçük yapılabileceğini verir. $n \to \infty$ iken (u_n, v_k) yakınsadığından, yukarıda belirlenen k için ilk terim n, m sayılarının N sayısından büyük seçilmesi ile $\epsilon/4$ den küçük yapılabilir. Buradan (u_n, v) dizisinin $\mathbb{C}$ de Cauchy ve dolayısı ile yakınsak olduğunu elde ederiz.

Problem 2. $f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ için

$$c_k = \int_{(0,2\pi)} f(x) e^{-ikx}, k \in \mathbb{Z}$$

ile tanımlanan c_k sayılarının

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$$

sağladığını varsayalım. $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ gösteriniz.

Çözüm. Bu düşünüldüğünden daha zor bir soru oldu ama yinede denenmeli. Öncelikle c_k sayıları vardır. Çünkü $f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ verildiğinden ve e^{-ikx} fonksiyonları sürekli olduklarından çarpımları olan fe^{-ikx} fonksiyonları $\mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ uzayındadırlar. Şimdi verilen $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 < \infty$ koşulu Fourier serisinin $L^2(0, 2\pi)$ uzayında yakınsadığından

$$(17.7) \quad g = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{C}} c_k e^{ikx}$$

ile tanımlanan fonksiyon iyi tanımlıdır. Şimdi yapılmak istenen hemen heryerde $f = g$ olduğudur. Kuşkusuz bu $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ verecektir. $h = f - g$ ise $f \in \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ olur. Zira $\mathcal{L}^2(0, 2\pi) \subset \mathcal{L}^1(0, 2\pi)$ vardır. Yukarıdaki (17.7) den f ve g nin Fourier katsayılarının aynı olduğunu, buradan da

$$(17.8) \quad \int_{(0,2\pi)} h(x) e^{ikx} = 0 \quad , \forall k \in \mathbb{Z}$$

buluruz. Dolayısı ile kanıtlamamız gereken hemen heryerde $h = 0$ olduğudur. Şimdi L^2 uzayında Fourier bazının tamlığının kanıtında gördüğümüz gibi sup normunda, son nokta yakınlarında sıfır değeri alan sürekli fonksiyonlar içinde üstel fonksiyonların yoğun olduğunu hatırlayalım. Buradan integralin sürekliliğini kullanarak, sürekli g fonksiyonları için

$$(17.9) \quad \int_{(0,2\pi)} hg = 0$$

elde ederiz. Daha önce yapılanlardan, bir I aralığının karakteristik fonksiyonu χ_I fonsiyonuna yakınsayan ve sürekli fonksiyonlardan oluşan g_n dizisinin varlığını biliyoruz. Dikkat ederseniz bu yakınsama düzgün yakınsama değildir ancak integrallenebilir her h fonksiyonu için $hg_n \to h\chi_I$ yakınsaması $\mathcal{L}^1$ uzayında geçerlidir. Bunu kullanarak (17.9) da söylenenden fazlasını elde edebiliriz. Şöyleki, tüm basamak fonksiyonları g için

$$(17.10) \quad \int_{(0,2\pi)} hg = 0$$

vardır. Buradan hemen heryerde $h = 0$ elde edeçeğiz. Eğer, $\int_{(0,2\pi)} |h| = 0$ elde edebilirsek istediğimiz hemen çıkacağından, bunu göstermeye çalışalım. Eğer $g \in \mathcal{L}^1$ ise (mutlak yakınsayan bir serinin kısmi toplamları olan) hem $L^1(0, 2\pi)$ uzayında hem de hemen heryerde g fonksiyonuna yakınsayan h_n fonksiyonları vardır. Dolayısı ile her iki yakınsama türünde de $|h_n| \to |g|$ vardır. Şimdi

$$(17.11) \quad h_n(x) = 0 \quad \text{ıçin} \quad s_n(x) = 0, \quad \text{diğer durumlarda} \quad s_n(x) = \frac{\overline{h_n(x)}}{|h_n(x)|}$$

ile s_n fonksiyonlarını tanımlıyalım. Kuşkusuz s_n dizisi bir basamak fonksiyonları dizisidir (ve mutlak değerleri 1 olduğundan) sınırlı olup $s_n h_n = |h_n|$ sağlamaktadırlar. Şimdi aşağıdaki muhteşem özdeşliğe başvuralım:

$$(17.12) \quad |h(x)| = |h(x)| - |h_n(x)| + s_n(x)(h_n(x) - h(x)) + s_n(x)h(x)$$

Şimdi bu özdeşlikte integral alalım ve üçgen eşitsizliğini kullanalım. $n \to \infty$ iken;

$$(17.13) \quad \begin{aligned} &\int_{(0,2\pi)} |h| = \int_{(0,2\pi)} (|h(x)| - |h_n(x)|) + \int_{(0,2\pi)} s_n(x)(h_n - h) \leq \\ &\int_{(0,2\pi)} (||h(x)| - |h_n(x)|| + \int_{(0,2\pi)} |h_n - h| \to 0 \end{aligned}$$

Burada ilk satırda (17.10) kullanarak,(17.12) nin sağ tarafındaki üçüncü terimin integralinin sıfır olduğunu gördük. Sonrasında ise $|s_n| \leq 1$ ve yakınsama özelliklerini kullandık.

Dolayısı ile gerçekten hemen heryerde $h = 0$ veya $f = g$ ve $f \in \mathcal{L}^2(0, 2\pi)$ vardır.

Problem 3. Aşağıdaki iki dizi uzayını düşünelim.

$$h_{\pm 2} = \{c : \mathbb{N} \to \mathbb{C}, \sum_{j=1}^{\infty} j^{\pm 4} |c_j|^2 < \infty\}$$

$h_{\pm 2}$ uzaylarının Hilbert uzayları olduğunu gösteriniz.

Bir C sabiti için

$$T : h_2 \to \mathbb{C}, |Tc| \leq C||c||_{h_2}$$

sağlayan doğrusal dönüşümlerin $d : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, h_{-2} uzayının bir öğesi olmak üzere

$$Tc = \sum_{j=1}^{\infty} c_i d_i$$

biçiminde olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $h_{\pm 2}$ uzaylarının Hilbert uzayları olduklarını kanıtlamak için l^2 uzayını kullanmak gerek. Şimdi kompleks sayıların dizileri üzerinde aşağıda tanımlayacağımız dönüşümleri düşünelim:

$$(17.14) \quad (T^{\pm}c)_j = c_j j^{\pm 2}$$

$h_{\pm 2}$ hakkında hiç bir şey bilmeden de bu dönüşümün $h_{\pm 2}$ ile l^2 arasında bire-bir bir dönüşüm olduğunu görebiliriz. Üstelik bu dönüşüm normla ilgili olarak

$$(17.15) \quad ||c||_{h_{\pm 2}} = ||Tc||_{l^2}$$

sağladığı gibi doğrusal bir dönüşümdür de. Buradan da $h_{\pm 2}$ doğrusallığı elde edilir. Bu nedenle, bu uzaylar Hilbert uzaylarıdır ve $T^{\pm}$, l^2 uzayları ile izometrik, örten izomorfizmalar teşkil ederler. $h_{\pm 2}$ uzayları üzerindeki iççarpım ise

$$(17.16) \quad (c,d)_{h_{\pm 2}} = \sum_{i=1}^{\infty} j^{\pm 4} c_j \overline{d_j}$$

şeklindedir. Şimdi bir kez h_2 uzayının Hilbert uzayı olduğunu saptadığımızda Riesz Temsil Teoremini kullanarak herhangi sürekli ve doğrusal
$T : h_2 \to \mathbb{C}, |Tc| \leq C||c||_{h_2}$ dönüşümünün

$$(17.17) \quad Tc = (c,d')_{h_2} = \sum_{j=1}^{\infty} j^4 c_j \overline{d'_j}, d' \in h_2$$

biçiminde olduğunu görürüz. Eğer $d' \in h_2$ ise $d_j = j^4 d'_j$, h_{-2} uzayında bir dizi tanımlar. Bu dizi

$$(17.18) \quad \sum_j j^{-4}|d_j|^2 = \sum_j j^4 |d'_j|^2 < \infty$$

ile betimlenen dizidir. Bunu (17.17) de yerine koyarak

$$(17.19) \quad Tc = \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j, d \in h_{-2}$$

elde ederiz.