18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 16. SINIRLI DÖNÜŞÜMLER,ÜNİTER DÖNÜŞÜMLER VE İZİ SONLU BOYUTLU DÖNÜŞÜMLER

Önerme 23. Tersinir dönüşümlerin kümesi $GL(\mathcal{H})$, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$'nın açık altkümesidir.

Kanıt. Neumann serilerinin yakınsaklığını kullanarak $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\|A\| < 1$ ise $Id - A$ dönüşümünün tersinir olduğu gösterilmişti, yani $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ da 2-yönlü tersi vardır (bu, Açık Dönüşüm Teoreminden dolayı, 1-1 ve örten olmasına denktir).

Dolayısıyla, $G \in GL(\mathcal{H})$ verilsin. Varsayımdan, G'nın 2-yönlü tersinir ve tek bir tersi $G^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ vardır, yani:

$$G^{-1}G = GG^{-1} = Id. \tag{16.1}$$

Bu durumda bazı $\epsilon > 0$ için $B(G, \epsilon) \subset GL(\mathcal{H})$ olduğunu göstermek istiyoruz. Aslında $\epsilon = \|G^{-1}\|^{-1}$ olarak seçebileceğimiz göreceğiz. Temel fikir $G + B$ nın 1-1 ve örten ve dolayısıyla tersinir olduğunu göstermektir. Bu amaçla E kümesini

$$E = G^{-1}B \Rightarrow G + B = G^{-1}(Id + G^{-1}B). \tag{16.2}$$

olarak alalım. $Id + G^{-1}B$ 1-1 ve örten ise, G^{-1} 1-1 ve örten olduğundan, $G + B$ 1-1 ve örtendir. Öte taraftan:

$$\left\|G^{-1}B\right\| < 1 \Rightarrow Id + G^{-1}B \quad \text{tersinirdir.} \tag{16.3}$$

$\|G^{-1}B\| \leq \|G^{-1}\| \, \|B\|$ olduğundan, beklenildiği gibi, $\|B\| < \|G^{-1}\|$ elde edilir.
$\square$

Böylece $GL(\mathcal{H}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$, tersinir elemanların kümesi açıktır. Ayrıca bu gruptur-çünkü, $G_1, G_2 \in GL(\mathcal{H})$ ise G_1G_2'nın tersi $G_2^{-1}G_1^{-1}$ dır.

Bu grubun daha küçük bir altgrubu vardır, $U(\mathcal{H})$, aąğıda tanımlanan birimsel grup

$$U(\mathcal{H}) = \{U \in GL(\mathcal{H}) : U^{-1} = U^*\}. \tag{16.4}$$

Bu önemli bir konudur ve daha sonra kullanılacaktır.

Ayrılabilir bir Hilbert uzayında birimsel grup $n \times n$ bildik matris grupları $U(n)$ ye çok benzer özellikler gösterir. Elbette buradaki grup çok daha büyüktür.

Aslında daha sonra gösterileceği gibi başka önemli farklar vardır (ya da problemlerde ele alacağımız gibi). Kanıtını vermeyeceğim fakat bilinmesi gerekenlerden biri, $U(\mathcal{H})$ bir metrik uzayı olarak, büzülebilirdir- ancak önemli bir topolojisi yoktur. Buna karşın $U(n)$ nın aşikar olmayan, özellikle büyük n ler için, bir çok topolojisi vardır- $U(\mathcal{H})$, $n \to \infty$ için $U(n)$ nin limitine benzemez.

Şimdi $GL(\mathcal{H})$ elemanları olarak "büyük" operatörlerin karşıtlarından bahsedilecek.

Tanım 7. Bir dönüşüm $T \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$'nın *sonlu ranklı* olması, görüntü uzayının sonlu boyutlu olması anlamındadır (bu durumda boyuta T'nın rankı denir.) Sonlu ranklı dönüşümlerin kümesi $\mathcal{R}(\mathcal{B})$ ile gösterilir.

Sonlu ranklı iki dönüşümün toplamı da sonlu ranklıdır: Çünkü görüntü kümesi görüntü uzaylarının toplamı içindedir.

$$(16.6) \quad (T_1 + T_2)(u) \in Ran(T_1) + Ran(T_2),$$

burada geçen $Ran(T)$, T'nin görüntü uzayının boyutudur. T'nin bir sabitle çarpılmasıyla edilen dönüşümün görüntüsü T'nin görüntüsünün içnde kalacağından, sonlu ranklı dönüşümlerin kümesi $\mathcal{B}(\mathcal{H})$'nın bir altuzayıdır. Ayrıca

$$(16.7) \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \quad \text{ve} \quad T \in \mathcal{R}(\mathcal{B}) \quad \text{ise} \quad BT \in \mathcal{R}(\mathcal{B})$$

dir. Gerçekten BT'nin görüntü kümesi, B'nin T'nin göruntüne kısıtlanan dönüşümün görüntü kümesidir. Ve bu, $Ran(T)$'nin bir tabanının görüntüsü ile üretilen uzay olduğundan sonlu boyutludur. Aynı biçimde, TB'nin görüntü kümesi, T'nin görüntüsünde kaldığından $TB \in \mathcal{R}(\mathcal{H})$ dır. Böylece aşağıdaki önermenin birçok kısmını kanıtlamış olduk.

Önerme 24. Aşağıdakidaki anlamda sonlu ranklı dönüşümler $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ içinde bir *-kapalı idealdir: Yani aşağıdaki (16.8) sağlayan bir altuzaydır.

$$(16.8) \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), T \in \mathcal{R}(\mathcal{H}) \Rightarrow B_1 T B_2, T^* \in \mathcal{R}(\mathcal{H}).$$

Kanıt. T sonlu ranklı olsun. T^* nın sonlu ranklı olduğunu gösterelim. Diğer kısımlar zaten gösterildi. Bunu yapmak için sonlu ranklı dönüşümlerin açık bir temsilini bulalım. $Ran(T)$ sonlu boyutlu olduğundan her $u \in \mathcal{H}$ için, $f_1, ..., f_N$ ler $Ran(T)$ nin tabanı olmak üzere

$$(16.9) \quad Tu = \sum_{i=1}^{N} c_i f_i$$

olarak yazılabilir. Burada c_i ler sabitlerdir. Böylece, f_i vektörleri taban olduğundan, $u \to c_i$ fonksiyonellerini tanımlayalım. Bunlar süreklidir. Basitce f_i leri ortonormal olarak seçerek f_i ile (16.9) daki gösterimi kullanarak,

$$(16.10) \quad c_j = (Tu, f_j) = (u, T^* f_j)$$

buluruz. Ayrıca (Riesz Teoreminden)

$$(16.11) \quad Tu = \sum_{i=1}^{N} (u, e_i) f_i$$

olacak biçimde $e_i = T^* f_i \in \mathcal{H}$ elemanları vardır. Tersine T, (16.11) deki gibi yazılabiliyorsa, T'nin görüntü uzayı f_i ile üretilen uzayın içinde kalacağından, sonlu ranklıdır.

(16.11) den dolayı,

$$(16.12) \quad (T^* v, u) = (v, Tu) = \sum_{j=1}^{N} (v, f_i)(e_i, u) \quad \forall u \in \mathcal{H} \Rightarrow T^* v = \sum_{i=1}^{N} (u, f_i) e_i,$$

T^* dönüşümü de sonlu ranklıdır. Burada f_i ve e_i lerin rolleri değişti. □

Daha sonra $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ içinde $\mathcal{R}(\mathcal{H})$ idealinin kapanışının kompakt operatörlerin ideali olduğu gösterilecek. Kapanış kesinlikle kapalı bir kümedir. Üstelik,

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve normda $T_n \to K$ olması

$$(16.13) \quad B_1 T_n B_2 \to B_1 K B_2, \quad T_n^* \to K^*$$

gerektireceğinden,$\mathcal{R}(\mathcal{H})$ kümesi, *-kapalı idealdir.

Sonuç olarak kompakt dönüşümler sonlu ranklı operatörlerin kapanışıdır ve kapalı, *-idealdir.

Burada ideal koşulunun önemi altgrupların normallik koşuluna benzemesidir-bir $\mathcal{B}$ cebirinin bir $\mathcal{I}$ idealine bölünmesiyle elde edilen bölüm uzayı $\mathcal{B}/\mathcal{I}$ yine bir cebirdir. Kompakt dönüşümler ideali $\mathcal{K}(\mathcal{H})$'nin bölümü, $\mathcal{K}$ kapalı olduğundan, bir Banach uzayıdır. Buna Calkin cebiri denir.

Önteorem 11 (Satır rank=Sütün rank). Bir Hilbert uzayında sonlu ranklı her dönüşüm için, T'nin görüntüsünün boyutu T^*'nın görüntüsünün boyutuna eşittir.

Kanıt. Sonlu ranklı her dönüşümün (16.11) biçiminde olduğu gösterildi. f_i ler T'nin görüntüsünün bir tabanı ise, $N = dimRan(T)$, e_i ler doğrusal bağımsızıdırlar. Gerçekten, değil ise, en az bir e_i, $e_i = \sum_{j \neq i} c_j e_j$ biçimindedir. Bunu (16.11) e yerleştirerek

$$(16.14) \quad Tu = \sum_{j \neq i} (u, e_j)(f_j + \overline{c_j} f_j)$$

elde edilir ve buradan görüntünün boyutu en fazla $N - 1$ olur, bu f_i lerin seçimiyle çelişir.

e_i ler doğrusal bağımsız olduklarından (16.12) den T^* nın görüntü uzatının boyutu N (f_i ler doğrusal bağımsız)-her sonlu ranklı operatör için $dimRan(T^*) \leq N$ ise eşitliği elde etmek için $(T^*)^* = T$ eşitliğini kullanınız.

PROBLEMLER 8

Problem 8.1 Sürekli bir fonksiyon $K : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$'nın her $x \in [0,1]$ için $K(x) \in L^2(0,2\pi)$ nın Fourier serisinin düzgün yakınsadığını gösteriniz, yani: $K_n(x)$, $|k| \le n$ üzerinde Fourier serisinin toplamı ise $K_n : [0,1] \to L^2(0,2\pi)$ süreklidir ve

$$\sup_{x\in[0,1]} \|K(x) - K_n(x)\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0. \tag{18.8}$$

İp ucu: Daha önce kanıtı verilen bir Hilbert uzayında kompaktlık özelliğini kullanınız.

Problem 8.2 Çekirdeği $K \in C([0,1]^2)$ olan $L^2(0,1)$ de tanımlı integral dönüşümünü ele alalım, yani

$$T(u)(x) = \int_{(0,1)} K(x,y)u(y). \tag{18.9}$$

T'nın L^2 de sürekli olduğunu ve sonlu ranklı dönüşümlerin norm kapanışında olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Önceki problemi kullanınız. Bu şekilde tanımlanan sürekli fonksiyon K için, $x \in [0,1] \to K(x,.) \in C([0,1])$ fonksiyonunun sürekli olduğunu ve böylece $K : [0,1] \to L^2(0,1)$ sürekli, dolayısıyla az önceki problem aralık yeniden ayarlanarak uygulanır.

Daha detaylı bir yardımcı görüş: $K(x,y)$ yi $L^2(0,1)$ de değer alan x değişkenli bir fonksiyon olarak ele alabiliriz. $K_n(x,y)$ önceki problemde verilen değişkenleri x, y olan fonksiyon olsun. Bu fonksiyonun n noktasında y değişkenine göre Fourier serisinin budanmış halini alalım. Bu fonksiyonun $L^2(0,1)$ de sonlu ranklı bir dönüşüm tanımladığını gösteriniz. Sürekli fonksiyonlarda değer aldığı kuşkusuz. Ama aynı zamanda görüntüler kare integrallenebilirdir. Buradaki fikir n büyüdükçe fark dönüşümünün olan $K - K_n$ dönüşüm normunun sıfıra gitmesidir. Bunu göstermek açıklayıcı olabilir. Diğer durum için x ve y lerin rolleri değiştirilir.

Problem 8.3 Bir değişkenli Lebesgue integrallenebilir fonksiyonlara odaklanılmasına karşın, bir yerde, örtme önteoremi 2 boyut için kanıtlandı. Burada yapılan tartışmayı iki boyuta taşımaktı. $L^2((0,2\pi)^2)$ nin bir Hilbert uzayı olduğunu gösterdiğinizi varsayalım. Kanıt için bilmedikleriniz bir listesini yaparak $\frac{exp(ikx+iyl)}{2\pi}$, $(k, l \in \mathbb{Z})$ fonksiyonlarının tam ortonormal taban olduğunun gösterilmesidir.