18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

18.102 Fonksiyonel Analize Giriş Bahar Dönemi 2009

Ders 15. AÇIK DÖNÜŞÜM VE KAPALI GRAFİK TEOREMİ

Banach uzaylarının temel özelliklerini ve ayrılabilir bir Hilbert uzayında tanımlı sınırlı dönüşümlerin $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nın cebir yapısını hatırlayalım. Özel olarak bu uzay

$$(15.1) \quad \|A\| = sup_{\|u\|=1}\|Au\|_{\mathcal{H}}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır ve

$$(15.2) \quad \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Açık dönüşüm teoremini tekrar ifade ederek kanıtını verdik.

Teorem 13 (Açık Dönüşüm). B_1 ve B_2 Banach uzayları arasında verilen $A : B_1 \to B_2$ sınırlı doğrusal dönüşümü $A(B_1) = B_2$ sağlıyor, yani örten ise, A açıktır:

$$(15.3) \quad \text{her açık küme} \quad O \subset B_1 \quad \text{için} \quad A(O) \subset B_2\text{açıktır}$$

Kanıt. Ders 13 de. Bunun iki sonuçu: $A : B_1 \to B_2$ sınırlı, 1-1 ve örten ise tersi de sınırlıdır. Ikincisi olarak Kapalı Grafik Teoremi ele aldık. Bunların hepsi Ders 13 nın notlarında. Düzgün Sınırlılık Teoreminin ikinci uygulaması olarak-dönüşümlerin kuvvetli yakınsamasından bahsedilmişti. Ayrılabilir bir Hilbert uzayında verilen sınırlı bir dönüşüm dizisi $A_n \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ *kuvvetli yakınsaması* her $u \in \mathcal{H}$ için $A_n(u)$ nın yakınsaması anlamındadır. Buradan limitin sınılı bir dönüşüm olduğu görülür- ya da istenirse tanım olarak eklenebilir. Düzgün Sınırlılık Teoremi A_n kuvvetli yakınsak ise $\sup_n \|A_n\| < \infty$ olduğunu gösterir. Bu haftanın problemlerinde buna gereksinim duyulacak.

Kaydırma operatörü $S : l^2 \to l^2$

$$(15.4) \quad S(\sum_{j=0}^{\infty} c_j e_j) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j e_{j+1}$$

tanımlanmış-dizinin her elemanı 'bir üste' kaydırılmış ve sıfır vektörü ile başlanmıştı. Bunun hakkında konuşulmuştu. Bu sınırlı dönüşümlerin bir örneğidir ve açıkca $\|S\| = 1$, $Au = 0$ ise $u = 0$ olduğundan $1 - 1$ fakat örten değildir. Gerçekten S'nin görüntü kümesi

$$(15.5) \quad H_1 = \{u \in L^2 : (u, e_1) = 0\}$$

altuzayıdır.

Doğrudan ya da Açık Dönüşüm Teoremi kullanılarak, S'nin H dan H_1'e sınırlı doğrusal olarak tersinir olduğunu fakat H da örten olmadığını göstermek kolaydır. Bu haftanın alıştırmalarında görülebileceği gibi, küçük permutasyonlarla tersinir yapılamaz. Bu ayrıca, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ nın tersinir elemanlarının kümesi yoğun olmadığını gösterir-bu sonlu boyutlu olma durumundan epey farklıdır.

Sonuçta tersinebilir elemanlar hakkında konuşulmaya başlandı:

$$GL(\mathcal{H}) = \{A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) : \exists \quad B \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), BA = AB = Id\}. \tag{15.6}$$

Önteorem 10. $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ ve $\|A\| < 1$ ise

$$Id - A \in GL(\mathcal{A}). \tag{15.7}$$

Kanıt. Neumann serileri. $\|A\| < 1$ ise $\|A^j\| \leq \|A\|^j$ ve buradan Neumann serileri,

$$B = \sum_j A^j, \tag{15.8}$$

$\sum_{j=0}^{\infty} \|A^j\|$ yakınsak olduğundan, $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ da mutlak toplanabilirdir. Üstelik, çarpımın norma göre sürekliliğinden

$$AB = A \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n} A^j = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n+1} A^j = B - Id \tag{15.9}$$

elde edilir. Benzer biçimde $BA = B - Id$. Bu $(Id - A)B = B(Id - A) = Id$ olduğunu gösterir. Böylece B, $Id - A$ nın 2-taraflı tersidir.□

Önerme 22. $B(\mathcal{H})$ uzayının tersinir elemanlarının grubu $GL(\mathcal{H})$ açık fakat yoğun değildir .($\mathcal{H}$ sonsuz boyutlu ise).

Kanıt. Bir sonraki derste ele alınacaktır.