18.102
Introduction to Functional Analysis
Bahar 2009
Prof.Dr.Richard Melrose

DERS 14. FOURİER SERİLERİ VE $L^2(0, 2\pi)$

Soyut Hilbert uzayları hakkında öğrendiklerimizi, somuta indirgeyerek gerçel sayıların sonlu bir (a, b) aralığındaki $L^2(a, b)$ Hilbert uzayında kullanacağız. Bu uzayın Hilbert uzayı olduğunu siz gösterdiniz. Hilbert uzayı tekniklerini geliştirmemizin ana nedeni aşağıdaki teoremdir.

Teorem 12 Eğer $u \in L^2(0, 2\pi)$ ise u'nun Fourier serisi

$$(14.1) \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}, c_k = \int_{(0,2\pi)} u(x)e^{-ikx}dx$$

$L^2(0, 2\pi)$ uzayında u fonksiyonuna yakınsar.

Dikkat ederseniz serinin noktasal veya hemen her yerde noktasal yakınsadığı söylenmemektedir çünkü bu u fonksiyonuna bağlı olarak doğru da olmayabilir. İleri sürülen sav sadece $u \in L^2(0, 2\pi)$ için

$$(14.2) \quad lim_{n\to n} \int |u(x) - \frac{1}{2\pi}\sum_{|k|\le n} c_k e^{ikx}|^2 = 0$$

dir. Şimdi soyut Hilbert uzaylarından öğrendiklerimizin bunu kanıtlamada ne denli yararlı olduğuna bakalım. Önce $e'_k(x) = exp(ikx)$ fonksiyonlarının $L^2(0, 2\pi)$ uzayında ve her $u \in L^2(0, 2\pi)$ için

$$(14.3) \int e_k{}'\overline{e'_j} = \int_0^{2\pi} exp(i(k-j)x) = 2\pi\chi_j$$

Böylece e_k fonksiyonları

$$(14.4) \quad e_k = \frac{e'_k}{||e'_k||} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}$$

$L^2(0, 2\pi)$ uzayında ortonormal bir küme oluştururlar. Buradan (14.1) deki ifadenin u fonksiyonunun bu ortonormal kümeye göre Fourier-Bessel serisi olduğunu elde ederiz.

$$(14.4) \quad c_k = \sqrt{2\pi} < u, e_k > \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}c_k e^{ikx} =< u, e_k > e_k$$

Bu serinin $L^2(0, 2\pi)$ uzayında yakınsadığını, Bessel özdeşliğinden, zaten bildiğimizden, yapmamız gereken sadece aşağıdakidir:

Önerme 21 $k \in \mathbb{Z}$ olmak üzere e_k fonksiyonları $L^2(0,2\pi)$ uzayında ortonormal bir bazdır. Başka bir deyişle, $L^2(0,2\pi)$ uzayında tamdırlar:

$$(14.6) \quad \int ue^{ikx} = 0, \forall k \Rightarrow u = 0$$

Ancak bunun kanıtlanması o kadar kolay değildir. Denk bir ifade e_k fonksiyonlarının sonlu doğrusal bileşenlerinin gerdiği uzayın $L^2(0,2\pi)$ uzayında yoğun olduğudur. Bu ifadeyi Fejer'in yöntemi ile kanıtlıyacağız. Bu yaklaşımda $[0,2\pi]$ aralığındaki $u(0) = u(2\pi)$ koşulunu sağlayan herhangi sürekli bir fonksiyonun e_k fonksiyonlarının sonlu doğrusal birleşimlerinin düzgün limiti olduğu gösterilir. Sürekli fonksiyonların düzgün yakınsamaları $L^2(0,2\pi)$ uzayında yakınsama gerektirdiğinden ve 0 ile 2π yakınında sıfır olan fonksiyonlar $L^2(0,2\pi)$ içinde yoğun olduklarından(bunu daha sonra hatırlatacağız) bu Önerme 21 in kanıtı için yeterli olacaktır. Ancak bu ciddi bir analiz gerektirecektir!

Problem e_k ların gerdiği uzayda bir dizi bulmaktır. Buradaki marifet ise kuşkusuz Fourier açılımını kullanmaktır. Cesaro'nun fikri Fourier açılımını 'daha hızlı' yakınsatmaktı. Şimdilik $u \in L^2(0,2\pi)$ gibi herhangi bir fonksiyonla başlayalım- isterseniz bunu sürekli bir fonksiyon de alabilirsiniz. Dolayısı ile budanmış Fourier serisi aşağıdakidir.

$$(14.7) \quad U_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le n} (\int_{(0,2\pi)} u(t)e^{-ikt}dt)e^{ikx}$$

burada sadece c_k sayılarının değerlerini toplamda yerine koyduk. Bu sonlu bir toplam olduğundan x parametre olarak düşünülebilir, ve integralin doğrusallığı kullanılarak

$$(14.8) \quad U_n(x) = \int_{(0,2\pi)} D_n(x-t)u(t)\,, D_n(s) = \frac{1}{2\pi} \sum_{|k| \le n} e^{ikx}$$

Toplam belli bir bölüm gibi yazılabilir, birbirini götüren terimlerden dolayı,

$$(14.9) \quad (2\pi)D_n(s)(e^{is/2} - e^{is/2}) = e^{i(n+1/2)s} - e^{-i(n+1/2)s}$$

Dolayısı ile en azından $s \neq 0$ olduğu yerlerde ,

$$(14.10) \quad D_n(s) = \frac{e^{i(n+1/2)s} - e^{-i(n+1/2)s}}{2\pi(e^{is/2} - e^{-is/2})}$$

kuşkusuz, burada $s \to 0$ iken limit vardır. Cesaro'nun burada yakınsamayı hızlandırmak için yaptığı şey U_n leri aşağıdaki ortalamalar ile değiştirmesi idi.

$$(14.11)\quad V_n(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} U_i$$

Tekrar U_i lerin tanımını yazar ve integralin doğrusallığını kullanırsak

$$(14.12)\quad V_n(x) = \int_{(0,2\pi)} S_n(x-t)u(t), S_n(s) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} D_i(s)$$

Burada da $S_n(s)$ lerin daha uygun bir biçimini hesaplamak istiyoruz- ki bu Fejer çekirdeği- olarak bilinir. (14.10) da paydalar aynı olduğundan,

$$(14.13)\quad 2\pi(n+1)(e^{is/2} - e^{-is/2})S_n(s) = \sum_{i=0}^{n} e^{i(n+1/2)s} - \sum_{i=0}^{n} e^{-i(n+1/2)s}$$

Aynı yöntemle:

$$(14.14)\quad (e^{is/2} - e^{-is/2})\sum_{i=0}^{n} e^{i(n+1/2)s} = e^{i(n+1)s} - 1$$

Buradan;

$$(14.15)\quad 2\pi(n+1)(e^{is/2} - e^{-is/2})^2 S_n(s) = e^{i(n+1)s} + e^{-i(n+1)s} - 2$$

Buradan da

$$S_n(s) = \frac{1}{(n+1)}\frac{sin^2(\frac{(n+1)}{2}s)}{2\pi sin^2(s/2)}$$

elde ederiz.

Şimdi bu fonksiyon hakkında neler söylenebilir? İlk söylenebilecek, eğer $u = 1$ alırsak $n \geq 0$ için $U_n = 1$ ve dolayısı ile $V_n = 1$ da olduğudur. Böylece;

$$(14.16)\quad \int_{(0,2\pi)} S_n(x - .) = 1$$

buluruz. (14.15) de doğrudan görünen $S_n(s) \geq 0$ olduğudur. Paydanın ise $[0, 2\pi]$ aralığında sadece $s = 0$ ve $s = 2\pi$ sayılarında sıfır olduğudur. Bu sayılardan uzaklaşmak adına s sayılarını bir $\delta > 0$ için $(\delta, 2\pi - \delta)$ aralığından seçelim- şimdi sin fonksiyonu sınırlı olduğundan, bu aralıkta

$$(14.17)\quad |S_n(s)| \leq (n+1)^{-1}C_s$$

sağlanır. Şimdi sup normunda $V_n(x)$ fonksiyonlarının verilen $u(x)$ fonksiyonuna ne kadar yaklaştığına bakalım. Burada u fonksiyonunu sürekli alıyoruz. (14.16) dan ötürü, t integral değişkeni (ve $x \in [0, 2\pi]$ sabit kalmak üzere)

$$(14.18) \quad u(x) = \int_{(o,2\pi)} S_n(x-t)u(x)$$

yazabiliriz. Buradaki marifet

$$(14.19) \quad V_n(x) - u(x) = \int_{(o,2\pi)} S_n(x-t)(u(t) - u(x))$$

farkını yazabilmektir. Şimdi her x için integrali iki kısma ayıracağız, $\Gamma(x)$ kümesi ki burada $x-t \in [0, \delta]$ veya $x-t \in [2\pi-\delta, 2\pi]$ ve geriye kalanlar olmak üzere. Dolayısı ile;

$$(14.20) |V_n(x)-u(x)| \leq \int_{\Gamma(x)} S_n(x-t)|u(t)-u(x)| + \int_{(0,2\pi)\setminus\Gamma(x)} S_n(x-t)|u(t)-u(x)|$$

Şimdi $\Gamma(x)$ üzerinde ya $|t-x| \leq \delta$- noktalar birbirlerine bu denli yakındırlar- veya -t sıfır noktasına, x ise 2π noktasına yakın olduklarından $2\pi - x + t \leq \delta$ veya tersine , x sıfıra; t ; 2π noktasına yakın olduklarından $2\pi - t + x \leq \delta$ sağlanır. Her durumda, $u(0) = u(2\pi)$ varsayıp, sürekli fonksiyonun $[0, 2\pi]$ üzerindeki düzgün sürekliliğinden, verilen $\epsilon > 0$ için $\delta > 0$ yeterince küçük seçilerek, $\Gamma(x)$ üzerinde

$$(14.21) \quad |u(x) - u(t)| \leq \epsilon/2$$

yapılabilir. $\Gamma(x)$'nın tümleyeninde, hem (14.17) sağlanıp , hem de u sınırlı olduğundan,

$$(14.22) |V_n(x)-u(x)| \leq \epsilon/2 \int_{\Gamma(x)} S_n(x-t) + (n+1)^{-1}C'(\delta) \leq \epsilon/2 + (n+1)^{-1}C'(\delta)$$

elde edilir. Burada $0 \leq S_n$ yanısıra, integralinin de bir olduğu, $S_n(x-t)$ nin $\Gamma(x)$ üzerindeki integralini hesaplarken kullanıldı. δ, toplamdaki ilk terimi küçük yapacak şekilde seçilirse, u fonksiyonunun sınırlılığından, n yeterince büyük seçilerek, toplamdaki ikinci terim de küçük yapılabilir ve buradan $n \to \infty$ iken $[0, 2\pi]$ üzerinde

$$(14.23) \quad V_n(x) \to u(x)$$

$u \in C[0, 2\pi]$ ve $u(0) = u(2\pi)$ varsayımları ile, düzgün yakınsaması elde edilir.

Dolayısı ile uc noktalarda sıfır olan sürekli fonksiyonların $L^2(0, 2\pi)$ uzayında yoğun oldukları varsayımı ile Önerme 21 kanıtı verilmiş oldu. Gerçekten uc nokta yakınlarında sıfır olan $L^2(0, 2\pi)$ fonksiyonları yoğundurlar. Çünkü bunları gereği gibi budayıp

$$(14.24) \quad lim_{\delta \to 0} \left(\int_{(0,\delta)} |f|^2 + \int_{(2\pi-\delta,2\pi)} |f|^2) \right) = 0$$

Son noktalarda sıfır olan L^2 fonksiyonları , yine son noktalarda sıfır olan basamak fonksiyonlarının gerdiği uzayın kapanışı içinde olduklarını elde ederiz. Böylesi her basamak fonksiyonuna yine son noktalarda sıfır olan sürekli bir fonksiyon ile yaklaşabileceğimizden, yakınsama ile sorunumuz yoktur. Bu Teorem 12 nin kanıtını tamamlar.

PROBLEMLER 7

Problem 7.1 Fourier tabanı $exp(ikx)/\sqrt{2\pi}$ nın tam olduğu hesap ile gösterilebilir mi? Belki. Aşağıdaki sorular sizi yönlendirmek içindir. Sabit bir $t \in (0, 2\pi)$ değeri için
(1)

$$(14.25) \quad 0 \le x < t \quad \text{için} \quad f_t(x) = 1, \quad \text{ve} \quad t \le x \le 2\pi \quad \text{için} \quad f_t(x) = 0$$

basamak fonksiyonlarının $c_k(t) = \int_{(0,2\pi)} f_t e^{-ikx}$ Fourier katsayılarını bulunuz.
(2) Fourier serisinin $L^2(0, 2\pi)$ uzayında f_t fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter koşulun

$$(14.26) \quad 2\sum_{k>0} |c_k(t)|^2 = 2\pi t - t^2, t \in (0, 2\pi)$$

olduğunu gösteriniz.
(3) Bu koşulu Fourier serisi türünden yazınız ve Fourier serisinin tamlığının terimleri k^{-2} ve k^{-4} lerden oluşan toplamlar türünden ifade edilebileceğini gösteriniz.
(4) Ters yönde giderek, yukarıdaki iki serinin toplamlarını kullanarak, Fourier bazının tamlığını nasıl elde edebileceğimizi açıklıyabilir misiniz? Burada gerçekten çok ince bir nokta var, bakalım bu ince hususu görebilecek misiniz?

Problem 7.2 Seçilecek uygun d_k sabitleri için $d_k sin(kx/2), k \in \mathbb{N}$ fonksiyonlarının $L^2(0, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduğunu gösteriniz.
(İpucu :) Yapılacak iş $d'_k exp(ikx/2), k \in \mathbb{Z}$ fonksiyonlarının $L^2(-2\pi, 2\pi)$ uzayında ortonormal taban olduklarını göstermek ve sonra bu fonksiyonları tek fonksiyon olarak $(0, 2\pi)$ aralığından $(-2\pi, 2\pi)$ aralığına genişletmektir.

Problem 7.3 (e_k) dizisi ayrılabilir H Hilbert uzayında ortonormal bir taban olsun. $S : H \to H$ ve

$$(14.27) \quad Se_j = e_{j+1}, \forall j \in \mathbb{N}$$

sağlayan tek bir sınırlı doğrusal dönüşüm olduğunu gösteriniz. Eğer $B : H \to H$ sınırlı ve doğrusal bir dönüşüm ise $S + \epsilon B$ dönüşümünün bir ϵ_0 için ϵ'nun, $\epsilon < \epsilon_0$ değeri için tersinir olmadığını gösteriniz.
(İp ucu :)$Lu = (Bu, e_1)$ ile tanımlanan doğrusal fonksiyonel $L : H \to \mathbb{C}$ düşünelim. $B'u = Bu - (Lu)e_1 : H \to H_1 = \{u \in H : (u, e_1) = 0\}$ doğrusal bir dönüşümdür. Kimi küçük ϵ'lar için $S + \epsilon B$ dönüşümünün tersinir olduğunu gösteriniz. Bunu kullanarak $S + \epsilon B$ dönüşümünün H uzayından kendisine

bir izomorfizma olamıyacağını gösteriniz. Bunu yaparken ya e_1 vektörünün iz uzayında olmadığını veya çekirdek uzayında sıfırdan farklı bir vektör olduğunu gösterebilirsiniz.

Problem 7.4 Bir Hilbert uzayında sınırlı dönüşümlerin çarpımların noktasal yakınsama topolojisinde sürekli olduğunu gösteriniz. Başka bir deyişle eğer, A_n ve B_n noktasal olarak A ve B dönüşümlerine yakınsıyorlarsa , yani $A_n x \to Ax$,$B_n x \to Bx$ ise $A_n B_n$ dönüşümleri AB dönüşümüne noktasal yakınsar.

İp ucu: Önereceğim yardımcı görüsler yararlı olmayabilir, o açıdan bu görüşlere fazla odaklanmamalıdır.

Problem 6.1 H ayrılabilir bir Hilbert uzayı olsun. Bir $K \subset H$ kümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşul sınırlı, kapalı ve K da zayıf yakınsayan her dizinin yakınsak (kuvvetli) olması olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Bir yön için sınırlı her dizinin zayıf yakınsayan bir altdizisinin olduğunu gösteriniz.

Problem 6.2 Ayrılabilir bir Hilbert uzayında zayıf yakınsayan bir (v_n) dizisinin (kuvvetli) yakınsak olması için gerekli ve yeterli koşulun zayıf limit v'nin

$$\|v\|_H = \lim_{n\to\infty} \|v_n\|_H \tag{14.28}$$

koşulunu sağlaması olduğunu gösteriniz.

İp ucu: Aşağıdaki eşitliği göstermek yeterlidir.

$$(v_n - v, v_n - v) = \|v_n\|^2 - 2Re(v_n, v) + \|v\|^2. \tag{14.29}$$

Problem 6.3 Bir Hilbert uzayı H nın altkümesinin kompakt olması için gerekli ve yeterli koşulun kapalı, sınırlı ve 'sonlu boyutlu yaklaşım' özelliğinin olması, yani, her $\epsilon >$ için

$$d(K, D_N) = \sup_{u\in K} \inf_{v\in D_N} \{d(u,v)\} \leq \epsilon \tag{14.30}$$

olacak biçimde sonlu boyutlu bir $D_N \subset H$ doğrusal altuzayın olması, gerektiğini gösteriniz. İp ucu: Gerekliliği göstermek için her ortonormal tabana göre bir kompakt kümenin 'eş-küçük kuyruk' özelliğini kullanınız. Sonlu boyutlu yaklaşım koşulunu kullanmak için K da zayıf yakınsayan dizinin (kuvvetli) yakınsadığını kullanınız, konvekslik sonucunu kullanarak D_N'nın v_n'ye olan en yakın noktası v'_n olmak üzere D_N de (v'_n) dizisini tanımlayınız. v'_n nin zayıf ve böylece kuvvetli yakınsak olduğunu gösteriniz ve buradan da (v_n) dizisinin Cauchy olduğu görülür.

Problem 6.4 $A : H \to H$ sınırlı ve $A(H)$ sonlu boyutlu olsun. v_n zayıf yakınsak ise Av_n dizisinin H da yakınsadığını gösteriniz.

Problem 6.5 H_1 ve H_2 iki farkı Hilbert uzayı ve $A : H_1 \to H_2$ sınırlı bir doğrusal dönüşüm olsun.

$$(Au_1, u_2)_{H_2} = (u_1, A^*u_2)_{H_1} \quad \forall u_1 \in H_1, u_2 \in H_2 \tag{14.31}$$

olacak biçimde tek bir tane eşlenik $A^* : H_2 \to H_1$ sınırlı doğrusal dönüşüm olduğunu gösteriniz.