

MIT Açık Ders Malzemeleri

<http://ocm.mit.edu>

Bu materyallerden alıntı yapmak veya Kullanım Koşulları hakkında bilgi almak için <http://ocm.mit.edu/terms> veya <http://tuba.acik.ders.org.tr> adresini ziyaret ediniz.

18.102

Introduction to Functional Analysis

Bahar 2009

Prof.Dr.Richard Melrose

TEST 2 İÇİN HAZIRLIK PROBLEMLERİ

Richard Melrose

1. PROBLEM T2.1

$H$  ayrılabilir bir Hilbert uzayı,  $e_i$  ortonormal tabanı,  $(\cdot, \cdot)$  iç çarpım ve  $\|\cdot\|$  normu olsun.

(1) Zayıf yakınsamayan fakat her  $j$  için  $(u_n, e_j)$  yakınsayan bir  $u_n$  dizisi örneği veriniz.

(2)  $\|u_n\|$  sınırlı ve her  $j$  için  $(u_n, e_j)$  yakınsak ise  $u_n \rightarrow u$  olduğunu gösteriniz.

2. PROBLEM T2.2

$$(1) \quad h_1 = \{c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}, \|c\|_{h_1}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 |c_j|^2 < \infty$$

olan bir dizi uzayı olsun.

(1)  $h_1$  nin bir Hilbert uzayı olduğunu gösteriniz.

(2)  $h_1$  deki birim kürenin ö kompakt olduğunu gösteriniz- $l_2$  deki kapanışının kompakt olması anlamında.

3. PROBLEM T2.3

(1)  $\mathbb{R}$ 'nin bir alt kümesinin ölçüm sıfır olmasını basamak fonksiyonların serilerinin yakınsaması anlamında hatırlayınız.

(2) ölçümü sıfır olan bir kümenin basit olmayan bir açık aralık içermeyeceğini doğrudan gösteriniz.

(3) ölçümü sıfır olan bir kümenin tümleyeninin  $\mathbb{R}$  yoğun olduğunu gösteriniz.

4. PROBLEM T2.4

$f \in L^2(0, 2\pi)$  olmak üzere Fourier katsayıları

$$(1) \quad c_k = \int_{(0, 2\pi)} f(x) e^{-ikx}$$

$$(2) \quad \sum_k (k+1)^2 \|c_k\|^2 < \infty$$

yi sağlar.

$L^2(0, 2\pi)$  de  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}(2\pi)$ ,  $[f] = [\tilde{f}]$  olacak biçimde sürekli bir  $\tilde{f} : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  fonksiyonun olduğunu kanıtlayınız.

### 5. PROBLEM T2.5

$h_1$  Problem T2.2 deki gibi bir Hilbert Uzayı olsun. Bazı  $C$  sabiti için

$$(1) \quad T : h_1 \rightarrow \mathbb{C}, \quad |Tc| \leq \|c\|_{h_1}$$

koşulunu sağlayan bir doğrusal dönüşümün

$$(2) \quad Tc = \sum_{j=1}^{\infty} c_j d_j$$

biçiminde olduğunu gösteriniz, burada  $d_i$ ,

$$(3) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} |d_k|^2 < \infty.$$

### 6. PROBLEM T2.6

### 7. PROBLEM T2.6

### 8. PROBLEM T2.6